Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4140 Diskret Matematikk
Høst 2016

Løsningsforslag — Øving 7

Seksjon 5.1

$\boxed{4}$ **a)** $P(1)$ er utsagnet $1^3 = (1 \cdot (1+1)/2)^2$.

b) Begge sider i uttrykket over er lik 1.

c) Induksjonshypotesen er utsagnet

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

d) I induksjonssteget ønsker vi å bevise at for enhver $k \geq 1$ så er det slik at dersom $P(k)$ er sann, så impliserer det at $P(k+1)$ er sann. Vi ønsker altså å bevise at

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

når likheten i **c)** holder.

e) Ved å bruke induksjonshypotesen i den første likheten nedenfor får vi

$$\begin{aligned}\left(1^3 + 2^3 + \cdots + k^3\right) + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) \\ &= (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

f) Vi har fullført både basissteget og det induksjonssteget, så ved prinsippet om matematisk induksjon følger det at utsagnet er sant for alle positive heltall n, altså holder formelen for alle n.

$\boxed{6}$ *Basissteg:* Når $n = 1$ har vi $1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$.

Induktivt steg: Anta nå at $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$ for en $k \geq 1$ (induksjonshypotesen). Da er

$$\begin{aligned}(1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + k \cdot k!) + (k+1) \cdot (k+1)! &= (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! \\ &= (k+1)!(1 + k + 1) - 1 = (k+2)! - 1.\end{aligned}$$

Ved matematisk induksjon holder summasjonsformelen for alle $n \geq 1$. $\square$

$\boxed{14}$ I oppgaveteksten brukes k som summasjonsvariabel, så derfor bør vi bruke en annen variabel i induksjonssteget; for eksempel n.

Basissteg: For $n = 1$ har vi $\sum_{k=1}^{1} k \cdot 2^k = 1 \cdot 2^1 = 2 = 0 + 2 = (1-1)2^{1+1} + 2$.

Induktivt steg: Anta nå at $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$ for en $n \geq 1$ (induksjonshypotesen). Vi skal vise at

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = ((n+1)-1)2^{(n+1)+1} + 2 = n \cdot 2^{n+2} + 2.$$

Ved å splitte summen og bruke induksjonshypotesen får vi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k\right) + (n+1)2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} \\ &= (n-1+n+1)2^{n+1} + 2 = 2n \cdot 2^{n+1} + 2 = n \cdot 2^{n+2} + 2.\end{aligned}$$

Ved matematisk induksjon holder summasjonsformelen for alle $n \geq 1$. $\square$

Seksjon 5.2

$\boxed{4}$

a) Ved å observere at $18 = 4 + 2 \cdot 7$, $19 = 3 \cdot 4 + 7$, $20 = 4 \cdot 5$ og $21 = 3 \cdot 7$ så ser vi at $P(18)$, $P(19$, $P(20)$ og $P(21)$ er sanne.

b) La nå k være et tall med $k \geq 21$. Induksjonshypotesen er følgende utsagn: For alle j med $18 \leq j \leq k$ kan vi få j cent porto ved bare å bruke 4- og 7-cents frimerker.

c) I induksjonssteget må vi bevise at dersom induksjonshypotesen, **b)**, stemmer, så kan vi få $k+1$ cent i porto ved å kun bruke 4- og 7-cent frimerker.

d) Vi ønsker å få $k+1$ cent i porto. Siden $k \geq 21$ så er $k-3 \geq 18$, så fra induksjonshypotesen vet vi at $P(k-3)$ er sann, dvs. at vi kan få $k-3$ cent i porto. Legger vi til et 4-cent frimerke til så har vi $k+1$ cent, som ønsket.

e) Vi har fullført både basissteget og det induksjonssteget så ved prinsippet om sterk induksjon er utsagnet sant for alle heltall $n \geq 18$.

$\boxed{14}$ For å forstå hva oppgaven faktisk spør om kan det lønne seg å «tegne seg» gjennom et lite eksempel på egenhånd. Under er et eksempel man kan ta utgangspunkt i.

La oss si vi starter med en haug med $n = 5$ steiner. Hvis vi først deler den inn i to hauger med henholdsvis 2 og 3 steiner får vi et bidrag på $2 \cdot 3 = 6$. Hvis vi deretter deler haugen med 2 steiner inn i to nye hauger med 1 stein hver får vi et bidrag på $1 \cdot 1 = 1$. I neste steg må vi dele haugen med 3 steiner inn i en haug med 2 steiner og en haug med 1 stein. Dette gir et bidrag på $2 \cdot 1 = 1$. Til slutt må vi dele den siste haugen med 2 steiner i to hauger med 1 stein hver. Dette gir et bidrag på $1 \cdot 1 = 1$. Det totale bidraget ble $6 + 1 + 2 + 1 = 10$, som det skulle bli siden $\frac{5(5-1)}{2} = 10$.

Basissteg: For $n = 1$ er det ingen delinger å utføre så det totale bidraget er $0 = \frac{1(1-1)}{2}$.

Induktivt steg: La nå k være et tall med $k \geq 1$ og anta at følgende holder for alle j med $1 \leq j \leq k$: Hvis man starter med en haug med j steiner så vil enhver sekvens med delinger av denne haugen gi totalt bidrag på $\frac{j(j-1)}{2}$ (induksjonshypotesen).

Vi skal nå vise at enhver sekvens med delinger av en haug med $k+1$ steiner gir totalt bidrag på $\frac{(k+1)((k+1)-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$. Første deling gir to hauger med henholdsvis r og s steiner, der $r+s = k+1$ (og $r, s \geq 1$). Denne delingen gir et bidrag på rs. Siden $1 \leq r \leq k$ og $1 \leq s \leq k$ får vi fra induksjonshypotesen at uansett hvilke delinger vi utfører videre så får vi bidrag på $\frac{r(r-1)}{2}$ fra hugen med r steiner og bidrag på $\frac{s(s-1)}{2}$ fra hugen med s steiner. Det totale bidraget for hele haugen er derfor

$$\begin{aligned} rs + \frac{r(r-1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2} &= \frac{2rs + r^2 - r + s^2 - s}{2} = \frac{(r^2 - r + rs) + (s^2 - s + rs)}{2} \\ &= \frac{r(r+s-1) + s(r+s-1)}{2} = \frac{r(k+1-1) + s(k+1-1)}{2} \\ &= \frac{k(r+s)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}, \end{aligned}$$

som var det vi skulle vise. Ved matematisk induksjon vil enhver sekvens av med delinger av n steiner gi totalt bidrag på $\frac{n(n-1)}{2}$, for alle $n \geq 1$.

Seksjon 5.3

$\boxed{12}$ *Basissteg:* For $n = 1$ har vi $f_1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = f_1 f_2$.

Induktivt steg: La k være et tall med $k \geq 1$ og anta at $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2 = f_k f_{k+1}$ (induksjonshypotesen). Da er

$$\left(f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2\right) + f_{k+1}^2 = f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 = f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) = f_{k+1} f_{k+2}.$$

Ved matematisk induksjon holder summasjonsformelen for alle $n \geq 1$. □

$\boxed{18}$ For de som ikke er kjent med multiplikasjon med matriser så er multiplikasjon av 2×2 matriser gitt ved

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}. \end{bmatrix}$$

Tallet i rad i og kolonne j er altså lik indreproduktet (aka prikkproduktet aka skalarproduktet) av rad i i den første matrisen og kolonne j i den andre matrisen.

Basissteg: For $n = 1$ har vi

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix}.$$

Induktivt steg: La k være et tall med $k \geq 1$ og anta at $A^k = \left[\begin{smallmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{smallmatrix}\right]$ (induksjonshypotesen). Da er

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k+1} + f_k & f_{k+1} \\ f_k + f_{k-1} & f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{bmatrix}.$$

Ved matematisk induksjon har vi vist at $A^n = \left[\begin{smallmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{smallmatrix}\right]$ for alle $n \geq 1$. □

Seksjon 5.4

$\boxed{3}$ Først kjører else-delen av koden og finner at $\gcd(8,13) = \gcd(13 \,\mathbf{mod}\, 8, 8) = \gcd(5,8)$. Else-delen av koden kjøres så om og om igjen og finner at $\gcd(5,8) = \gcd(8 \,\mathbf{mod}\, 5, 5) = \gcd(3,5)$, deretter at $\gcd(3,5) = \gcd(5 \,\mathbf{mod}\, 3, 3) = \gcd(2,3)$, deretter at $\gcd(2,3) = \gcd(3 \,\mathbf{mod}\, 2, 2)$ og en gang til for å finne at $\gcd(1,2) = \gcd(2 \,\mathbf{mod}\, 1, 1) = \gcd(0,1)$. Til slutt, for å finne $\gcd(0,1)$, kjører første del av koden med $a = 0$ for å finne at $\gcd(0,1) = 1$. Slik finner algoritmen at $\gcd(8,13) = 1$.