NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4135 Matematikk 4D**

Faglig kontakt under eksamen: Helge Holden[a], Gard Spreemann[b]

Tlf: [a]92038625 , [b](735) 50238

Eksamensdato: x. august 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt enkel kalkulator og Rottmann matematisk formelsamling.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 4

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Vi skal se på differensialligningen

$$y''(t) + y(t) = \delta(t - \alpha) - \delta(t - \beta), \quad y(0) = y'(0) = 0. \tag{1}$$

Her er δ Diracs deltafunksjon, og α og β er to konstanter med $0 < \alpha < \beta$. Løs denne ligningen ved hjelp av Laplace-transformen.

Oppgave 2

a) Forklar hvorfor returverdien til `matte4(N)` fra Python-koden

```python
from math import exp, sin, cos

def matte4(N):
    x = 0.0
    for n in range(0, N):   # 0 <= n < N
        x = x - (exp(x) + cos(x) - 5)/(exp(x) - sin(x))
    return x
```

vil konvergere mot løsningen av

$$e^x + \cos(x) = 5 \tag{2}$$

når $N \to \infty$.

b) Skriv opp sekantmetoden for å løse ligning (2), og beregn den første approksimasjonen x_2 med startverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 1{,}5$.

Oppgave 3

a) Vis at

$$u(x,t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

oppfyller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{3}$$

for alle funksjoner ϕ og ψ som er to ganger kontinuerlig deriverbare. Her er c en konstant.

b) Anta at

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \tag{4}$$

for to gitte funksjoner f og g som er to ganger kontinuerlig deriverbare. Vis at da må

$$\begin{aligned}\phi(x) + \psi(x) &= f(x),\\ \phi(x) - \psi(x) &= \frac{1}{c}\int_0^x g(y)dy + A\end{aligned}$$

der A er en konstant. Vis også at

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{2}\Big(f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(y)dy + A\Big),\\ \psi(x) &= \frac{1}{2}\Big(f(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(y)dy - A\Big).\end{aligned}$$

Bruk dette til å vise d'Alemberts formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(f(x+ct) + f(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy. \tag{5}$$

c) La

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \sin(x).$$

Bestem løsningen av ligning (3) med initialbetingelser (4).

Oppgave 4 La $y = y(x)$ være løsningen av den ordinære differensialligningen

$$y' = x\ln(1+y), \quad y(0) = 1. \tag{6}$$

Bruk Heuns metode (også kalt forbedret Euler-metode eller «improved Euler method») med $h = 0{,}1$ til å finne en tilnærmet verdi til $y(x)$ i punktet

$$x_1 = 0{,}1.$$

Oppgave 5

a) Gitt funksjonen

$$g(x) = \cos(x), \quad x \in (0, \pi). \tag{7}$$

Skisser den odde 2π-periodiske utvidelsen til g. Denne funksjonen betegner vi f.

b) Hva er summen av Fourier-rekken til f i punktene $x = 0$, $x = \pi/4$ og $x = -4\pi$?

c) Bestem summen av rekken

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m-1}{4(2m-1)^2 - 1}\Big(\sin(m\pi/2) - \cos(m\pi/2)\Big).$$

Oppgave 6 Vi skal se på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 + x_3 &= -5, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 12, \\ 4x_1 \qquad\quad + 5x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Beregn den første Jacobi-iterasjonen med startverdi

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}\Big[f(x+h) - f(x)\Big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}\Big[f(x+h) - f(x-h)\Big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\Big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\Big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Sekantmetoden:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\Big(\mathbf{x}^{(k)}\Big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$\text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\
\mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1) \\
\mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)
\end{aligned}$$

Tabell over noen laplacetransformasjoner

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Tabell over noen fouriertransformasjoner

$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{a} \hat{f}\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
e^{-ax^2}	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{a}{\omega^2 + a^2}$