

**1** Kjøring av iterasjonEn(0.1, 0.1, 0.1, 1) gir  $x_1 = 1,60$ ,  $y_1 = 0,50$  og  $z_1 = 1,26$ .

Kjøring av iterasjonTo(0.1, 0.1, 0.1, 1) gir  $x_1 = 1,60$ ,  $y_1 = -5,30$  og  $z_1 = -17,3$ .

Både iterasjonEn og iterasjonTo er en implementasjon av Gauss–Seidels iterasjonsmetode. Forskjellen ligger i at iterasjonEn løser ut for  $x$ ,  $y$  og  $z$  for henholdsvis ligning 1, 2 og 3 i det oppgitte ligningssystemet, mens iterasjonTo løser ut for  $x$ ,  $y$  og  $z$  for henholdsvis ligning 1, 3 og 2 i det oppgitte ligningssystemet.

Da det oppgitte ligningssystemet er strengt diagonaldominant, kan vi slutte at iterasjonEn vil konvergere. Ettersom iterasjonTo bytter om på ligning 2 og 3 i det oppgitte ligningssystemet vil ikke dette lenger være et strengt diagonaldominant system. (Det at systemet ikke lenger er strengt diagonaldominant er ikke nok til å konkludere med at iterasjonTo ikke vil konvergere. Det kan vises, ved å regne ut den såkalte spektralradien til koeffisientmatrisen til ligningssystemet iterasjonTo tar utgangspunkt i, at iterasjonTo ikke vil konvergere.)

**2** Vi ser på ligningssystemet

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x_1 + e^{-x_2} - 2 \\ x_1 + (x_2 + 3)^2 - 4 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

der

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{f}(0, 0,5) = \begin{bmatrix} e^{-0,5} - 1 \\ 33/4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0,3935 \\ 8,2500 \end{bmatrix}.$$

Jacobimatrisen til  $\mathbf{f}$  er gitt ved

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x_1 & -e^{-x_2} \\ 1 & 2(x_2 + 3) \end{bmatrix},$$

som gir

$$J^{(0)} = J(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-0,5} \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Én iterasjon med Newtons metode gir

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(0)},$$

hvor

$$J^{(0)} \Delta \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-0,5} \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-0,5} \\ -33/4 \end{bmatrix} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}),$$

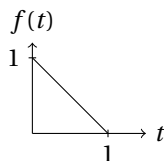
som har løsning

$$\Delta x_1^{(0)} \approx -3,7090 \quad \text{og} \quad \Delta x_2^{(0)} = 1 - e^{0,5} \approx -0,6487.$$

Altså er

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(0)} \approx \begin{bmatrix} -3,7090 \\ -0,1487 \end{bmatrix}.$$

**3** a) En skisse av grafen til  $f$ :



Vi observerer at  $f(t) = (1-t)[1-u(t-1)] = 1-t + (t-1)u(t-1)$ , der  $u$  er enhetssprangfunksjonen. Laplacetransformen til  $f$  er så gitt ved

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-s} = \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-s} \right)$$

der vi har benyttet tabellen i formelarket, samt andre forskyvningsteorem.

**b)** La  $Y = \mathcal{L}(y)$ . Laplacetransformasjon anvendt på den oppgitte differensialligningen gir

$$(s-1)Y(s) = \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-s} \right)$$

der vi har benyttet resultatet fra **a)**. Ved å løse ut for  $Y(s)$  får vi

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)} \left( 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-s} \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{s^2} + \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \right) e^{-s} \quad (1)$$

hvor overgangen (\*) fremkommer ved å benytte delbrøkkoppspalting. Inverstransformasjon anvendt på (1) gir så

$$y(t) = t + [e^{t-1} - t]u(t-1),$$

der vi har benyttet andre forskyvningsteorem.

**4** **a)** I vårt tilfelle er  $L = 1$  slik at

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{4} \\ a_k &= \int_{-1}^1 f(x) \cos k\pi x dx = \int_0^1 (1-x) \cos k\pi x dx \\ &= \underbrace{\left[ \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 x \cos k\pi x dx \\ &= - \left( \underbrace{\left[ \frac{x}{k\pi} \sin k\pi x \right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \sin k\pi x dx \right) = \frac{1}{k\pi} \left[ -\frac{1}{k\pi} \cos k\pi x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{k^2 \pi^2} (1 - \cos k\pi) = \begin{cases} 2/k^2 \pi^2 & \text{for } k = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{for } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \\ b_k &= \int_{-1}^1 f(x) \sin k\pi x dx = \int_0^1 (1-x) \sin k\pi x dx \\ &= \underbrace{\left[ -\frac{1}{k\pi} \cos k\pi x \right]_0^1}_{=(1+(-1)^{k+1})/k\pi} - \int_0^1 x \sin k\pi x dx \\ &= \frac{1}{k\pi} (1 + (-1)^{k+1}) - \left( \underbrace{\left[ -\frac{x}{k\pi} \cos k\pi x \right]_0^1}_{=(-1)^{k+1}/k\pi} + \frac{1}{k\pi} \underbrace{\int_0^1 \cos k\pi x dx}_{=0} \right) = \frac{1}{k\pi} \quad \text{for } k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Dermed er fourierrekken til  $f$  gitt ved

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}.$$

**b)** Vi er oppgitt at  $f(-1) = f(1) = 0$ , slik at

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi + b_n \sin n\pi) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = f(1) = 0,$$

hvor vi har utnyttet at funksjonen er kontinuert i  $x = 1$ . Dermed er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5 Den retningsderiverte er størst i retningen til gradienten. I vårt tilfelle er

$$\nabla f|_{(x,y)} = \left( \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, 3e^{3y} \right).$$

Spesielt er  $\nabla f|_{(\pi,0)} = (0, 3)$ .

Den retningsderiverte til  $f$  i retningen  $\mathbf{u}$  er gitt ved

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \mathbf{u} \cdot \nabla f|_{(x,y)},$$

og er størst når  $\mathbf{u}$  er parallell ( $\theta = 0$ ) med  $\nabla f|_{(x,y)}$ . I vårt tilfelle gir det  $\mathbf{u} = (0, 1)$  slik at

$$D_{\mathbf{u}}f(\pi, 0) = \mathbf{u} \cdot \nabla f|_{(\pi,0)} = 3.$$

6 a) Innsatt for  $u(x, t) = F(x)G(t)$  i  $u_{xx}(x, t) - u_{tt}(x, t) - 2u_t(x, t) - u(x, t) = 0$  får vi

$$F''(x)G(t) - F(x)\ddot{G}(t) - 2F(x)\dot{G}(t) - F(x)G(t) = 0.$$

Det vil si,

$$\underbrace{\frac{F''(x)}{F(x)}}_k = \underbrace{\frac{\ddot{G}(t) + 2\dot{G}(t) + G(t)}{G(t)}}_k,$$

som gir to ordinære differensialligninger

$$F''(x) - kF(x) = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{G}(t) + 2\dot{G}(t) + (1 - k)G(t) = 0. \quad (3)$$

Randbetingelsene  $u(0, t) = 0$  og  $u(\pi, t) = 0$  for alle  $t$  gir at

$$F(0) = F(\pi) = 0. \quad (4)$$

Vi har tre muligheter for konstanten  $k$ : (i)  $k > 0$ , (ii)  $k = 0$  og (iii)  $k < 0$ .

- (i) Innsatt for  $k = \mu^2 > 0$  i (2) får vi  $F''(x) - \mu^2 F(x) = 0$  som har løsning  $F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$ . Fra (4) kan vi slutte at  $A = B = 0$ , og dermed at  $F(x) = 0$ , som kun gir den trivielle løsningen  $u(x, t) = 0$ .
- (ii) Innsatt for  $k = 0$  i (2) får vi  $F''(x) = 0$  som har løsning  $F(x) = Ax + B$ . Fra (4) kan vi slutte at  $A = B = 0$ , og dermed at  $F(x) = 0$ , som kun gir den trivielle løsningen  $u(x, t) = 0$ .
- (iii) Innsatt for  $k = -p^2 < 0$  i (2) får vi  $F''(x) + p^2 F(x) = 0$  som har løsning  $F(x) = A \cos px + B \sin px$ . Fra  $F(0) = 0$  får vi at  $A = 0$ . Fra  $F(\pi) = 0$  får vi at  $B = 0$  eller  $p = n = 1, 2, 3, \dots$ . Tilfellet  $B = 0$  gir kun den trivielle løsningen  $u(x, t) = 0$ . Altså har vi at

$$F_n(x) = \tilde{B}_n \sin nx$$

for  $n = 1, 2, 3, \dots$

Innsatt for  $k = -n^2$  i (3) får vi  $\ddot{G}(t) + 2\dot{G}(t) + (1 + n^2)G(t) = 0$  som har løsning

$$G_n(t) = \hat{A}_n e^{-t} \cos nt + \hat{B}_n e^{-t} \sin nt$$

for  $n = 1, 2, 3, \dots$  der vi har gjort bruk av vinket gitt i oppgaven.

Altså gir  $k < 0$  den ikke-trivielle løsningen

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = (A_n e^{-t} \cos nt + B_n e^{-t} \sin nt) \sin nx$$

for  $n = 1, 2, 3, \dots$  og der  $A_n = \tilde{B}_n \hat{A}_n$  og  $B_n = \tilde{B}_n \hat{B}_n$ .

b) La

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-t} \cos nt + B_n e^{-t} \sin nt) \sin nx.$$

Fra  $u(x, 0) = 0$  får vi

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx = 0,$$

slik at  $A_n = 0$  for  $n = 1, 2, 3, \dots$

Dermed er

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-t} \sin nt \sin nx$$

slik at

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (n \cos nt - \sin nt) e^{-t} \sin nx.$$

Fra  $u_t(x, 0) = 2 \sin x - \sin 2x$  får vi

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin nx = B_1 \sin x + 2B_2 \sin 2x + \dots = 2 \sin x - \sin 2x.$$

Det vil si,  $B_1 = 2$ ,  $B_2 = -1/2$  og  $B_n = 0$  for  $n = 3, 4, 5, \dots$  Det gir

$$u(x, t) = 2e^{-t} \sin t \sin x - \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \sin 2x.$$

**7** La  $y_1 = y$  og  $y_2 = y'$ . Det gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) & y_1(0) &= 0 \\ y_2'(x) &= \frac{1}{2}[x + y_1(x) + y_2(x) + 2] & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Heuns metode er gitt ved

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

I vårt tilfelle, for  $n = 0$ , er

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_0) = h \begin{bmatrix} y_{2,0} \\ \frac{1}{2}[x_0 + y_{1,0} + y_{2,0} + 2] \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og

$$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{k}_1) = h \begin{bmatrix} h \\ h + 1 \end{bmatrix}.$$

Dermed er

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h^2 \\ h^2 + 2h \end{bmatrix}.$$

Innsatt for  $h = 0,2$  får vi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,21 \end{bmatrix}.$$

Altså gir Heuns metode med  $h = 0,2$  at  $y(0,2) \approx 0,02$ .