1 Integralet er en konvolusjon, så vi har

$$y(t) - 2(y * \cos)(t) = \sin t.$$

Laplace-transformasjon gir

$$\begin{aligned} Y(s) - 2Y(s)\frac{s}{s^2+1} &= \frac{1}{s^2+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} = F(s-1), \end{aligned}$$

hvor $F(s) = 1/s^2$. Vi vet at $\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = t$, og første forskyvningsteorem («s-forskyvning») gir derfor

$$y(t) = te^{-t}.$$

2 **a)** Et Newton-differensskjema for interpolasjonsdataene er

$$\begin{array}{r|c|cc} -1 & e^{-1} & & \\ & & \frac{1-e^{-1}}{0-(-1)} = 1 - e^{-1} & \\ 0 & 1 & & \frac{e^{-1}-1-(1-e^{-1})}{1-(-1)} = e^{-1} - 1 \ , \\ & & \frac{e^{-1}-1}{1-0} = e^{-1} - 1 & \\ 1 & e^{-1} & & \end{array}$$

som gir polynomet

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-1} + (1-e^{-1})(x-(-1)) + (e^{-1}-1)(x-(-1))(x-0) \\ &= 1 + (e^{-1}-1)x^2. \end{aligned}$$

b) Vi har

$$I = \int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x + (e^{-1}-1)\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{2}{3}(e^{-1}-1).$$

Integralet I er nettopp Simpsons metodes tilnærming til

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

med $2m = 2$ skritt. Vi vet at feilen i Simpsons metode, altså

$$\left| I - \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \right|,$$

er begrenset av

$$\frac{M\cdot(b-a)^5}{180\cdot(2m)^4}=\frac{M}{90},$$

hvor M er en konstant slik at $|f^{(4)}(x)|\leq M$ for alle $x\in[-1,1]$, hvor $f^{(4)}$ er den fjerdederiverte til integranden. I vårt tilfelle er

$$f^{(4)}(x)=e^{-x^2}(16x^4-48x^2+12).$$

Vi har $|f^{(4)}(x)|\leq|16x^4-48x^2+12|$, og ved å analysere dette polynomet på vanlig måte, ser vi at det har maksimum på intervallet $[-1,1]$ når $x=0$. Med $M=f^{(4)}(0)=12$ finner vi da

$$\left|I-\int_{-1}^{1}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\leq\frac{12}{90}=\frac{2}{15}.$$

$\boxed{3}$ La $g_a(x)=e^{-ax^2}$. Da er ligningen vår

$$(g_4*f)(x)=g_2(x).$$

Fourier-transformerer vi, får vi

$$\hat{g_4}\hat{f}=\hat{g_2}.$$

Vi vet at

$$\hat{g_a}(\omega)=\mathcal{F}(g_a)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\omega^2/(4a)},$$

så vi har

$$\hat{f}(\omega)=\frac{\hat{g_2}(\omega)}{\hat{g_4}(\omega)}=\frac{\frac{1}{2}e^{-\omega^2/8}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\omega^2/16}}=\sqrt{2}e^{-\omega^2/16}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{2\cdot4}}{\sqrt{2\cdot4}}e^{-\omega^2/(4\cdot4)}=4\hat{g_4}(\omega).$$

Dermed er

$$f(x)=4\mathcal{F}^{-1}(\hat{g_4})(x)=4e^{-4x^2}.$$

$\boxed{4}$ **a)** Vi beregner

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\\
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{n\pi}\left[x\sin nx\right]_{x=0}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_{x=0}^{\pi}\\
&=\frac{1}{n^2\pi}((-1)^n-1)\\
&=\begin{cases}0 & \text{når } n=2,4,6,\dots\\ -\frac{2}{n^2\pi} & \text{når } n=1,3,5,\dots\end{cases}\\
b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[x\cos nx\right]_{x=0}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos n\pi x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Fourier-rekken til f er i punktet x altså

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos((2m-1)x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

b) Parsevals identitet sier at

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Siden

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}$$

får vi

$$2\cdot\frac{\pi^2}{4^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2(2n-1)^4} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{3},$$

som gir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2(2n-1)^4} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{5}{24}\pi^2.$$

$\boxed{5}$ **a)** Setter vi inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i PDE-en i oppgaven får vi

$$F(x)G'(t) = F''(x)G(t) - F(x)G(t),$$

som etter omforming blir

$$\frac{F''(x)}{F(x)} - 1 = \frac{G'(t)}{G(t)}.$$

Siden ligningen holder for alle x og t, og venstre side ikke avhenger av t mens høyre side ikke avhenger av x, må begge sider være lik en konstant k. Vi får da to ODE-er:

$$F''(x) - (1+k)F(x) = 0 \tag{1}$$
$$G'(t) - kG(t) = 0. \tag{2}$$

Løsningen av ligning (1) kan ha tre former, avhengig av hva k er:

1. Dersom $k > -1$, er løsningen på formen

   $$F(x) = Ae^{\sqrt{1+k}x} + Be^{-\sqrt{1+k}x}.$$

   Randbetingelsen $u(0,t) = 0$ gir $F(0) = 0$, som gir $A = -B$, altså $F(x) = A(e^{\sqrt{1+k}x} - e^{-\sqrt{1+k}x})$. Randbetingelsen $u(1,t) = 0$ gir $F(1) = 0$, altså $A = 0$ og triviell løsning.

2. Dersom $k = -1$, er løsningen på formen

$$F(x) = Ax + B.$$

Randbetingelsen $u(0,t) = 0$ gir $F(0) = 0$, som gir $B = 0$. Randbetingelsen $u(1,t) = 0$ gir $F(1) = 0$, altså $A = 0$ og triviell løsning.

3. Dersom $k < -1$, er løsningen på formen

$$F(x) = C \cos px + D \sin px,$$

hvor vi har definert $p = \sqrt{-(k+1)}$. Randbetingelsen $u(0,t)$ gir $F(0) = 0$, som gir $C = 0$ og $F(x) = D \sin px$. Randbetingelsen $u(1,t) = 0$ gir $0 = F(1) = D \sin p$. For at vi ikke skal ha triviell løsning, har vi bare mulighetene $p = n\pi$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ (og $p = -\pi, -2\pi, \ldots$, men siden sinus er odde kan vi la konstanten D ta hånd om disse).

Ligning (1) har altså løsninger på formen

$$F_n(x) = D_n \sin n\pi x$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Siden $n\pi = \sqrt{-(k+1)}$, blir ligning (2)

$$G'(t) + (1 + n^2\pi^2)G(t) = 0.$$

Denne har løsninger på formen

$$G_n(t) = C_n e^{-(1+n^2\pi^2)t}.$$

De ikke-trivielle løsningene på oppgavens PDE er altså

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = A_n e^{-(1+n^2\pi^2)t} \sin n\pi x$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$.

b) Den generelle løsningen fra deloppgave 5a er

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(1+n^2\pi^2)t} \sin n\pi x.$$

Vi har da

$$\sin \pi x \cos \pi x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x$$

Høyre side er altså *Fourier-rekken* til funksjonen på venstre side. Vi kan derfor regne ut $A_1, A_2, \ldots$ ved hjelp av de vanlige integralene, eller vi kan spare oss tid ved å bruke dobbelvinkelsetningene til å skrive $\sin(\pi x)\cos(\pi x) = \sin(2\pi x)/2$, slik at

$$\frac{1}{2} \sin 2\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x.$$

Da er venstre side allerede en sinusrekke, og vi kan derfor lese av koeffisientene direkte: $A_2 = 1/2$ og $A_n = 0$ for alle $n \neq 2$. Dermed er løsningen som tilfredsstiller den gitte initialbetingelsen

$$u(x,t) = \frac{1}{2} e^{-(1+4\pi^2)t} \sin 2\pi x.$$

c) Fremoverdifferens i tid er tilnærmingen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(ih, jk) \approx \frac{1}{k}(U_{i,j+1} - U_{i,j})$$

og sentraldifferens i rom er tilnærmingen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(ih, jk) \approx \frac{1}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}).$$

Vi får da skjemaet

$$\frac{1}{k}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) = \frac{1}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) - U_{i,j}.$$

Med $h = 1/4$ og $k = 1/32$, er $j \geq 0$ og $1 \leq i \leq 3$, og skjemaet blir

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - \frac{1}{32}U_{i,j}.$$

For $i = 3$ og $j = 0$ finner vi

$$\begin{aligned} U_{3,1} &= \frac{1}{2}(U_{4,0} + U_{2,0}) - \frac{1}{32}U_{3,0} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\pi\frac{4}{4}\right)\cos\left(\pi\frac{4}{4}\right) + \sin\left(\pi\frac{2}{4}\right)\cos\left(\pi\frac{2}{4}\right)\right) - \frac{1}{32}\sin\left(\pi\frac{3}{4}\right)\cos\left(\pi\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{64}, \end{aligned}$$

og

$$u(3/4, 1/32) = \frac{1}{2}e^{-(1+4\pi^2)/32}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{1}{2}e^{-(1+4\pi^2)/32} \approx -0{,}1411.$$

Avviket vi ble bedt om å finne er altså $1/64 + e^{-(1+4\pi^2)/32}/2 \approx 0{,}1568$.

6 Metoden som er implementert er *Heuns metode* («forbedret Euler»), altså

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

hvor

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \qquad \text{og} \qquad k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1).$$

Hvis $f(x, y) = \lambda y$, er $k_1 = h\lambda y_n$ og

$$k_2 = h\lambda(y_n + h\lambda y_n) = h\lambda y_n + h^2\lambda^2 y_n,$$

slik at metoden blir

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left(2h\lambda y_n + h^2\lambda^2 y_n\right) = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right)y_n.$$

Anvendt n ganger finner vi

$$y_n = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right)^n y_0,$$

og vi ser at $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ kun hvis

$$\left|1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right| < 1.$$

I vårt tilfelle ($\lambda = -1000$) har vi altså

$$\left|1 - 1000h + \frac{10^6}{2}h^2\right| < 1,$$

som er tilfredsstilt hvis og bare hvis $h < 1/500$.

Dersom vi ønsker å si noe om $\lim_{n\to\infty} y_n$ også for større h, kan vi bruke en implisitt metode, for eksempel *baklengs Euler*. Med baklengs Euler er $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$. Da får vi

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\lambda y_{n+1} \\ y_{n+1} &= \frac{y_n}{1 - h\lambda}, \end{aligned}$$

slik at

$$y_n = \frac{y_0}{(1 - h\lambda)^n}.$$

Det er klart at $y_n \to 0$ når $n \to \infty$ så lenge $1 - h\lambda > 1$, som for $\lambda = -1000$ er sant uansett valg av $h > 0$.