NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4135 Matematikk 4D
eksamen 20. desember 2010

Løsningsforslag

1 Oppgaven kan, for eksempel, løses ved hjelp av Lagrange-interpolasjon eller Newtons interpolasjonsformel.

- *Lagrange-interpolasjon:*

$$\begin{aligned}
p(x) &= 3{,}0\frac{x(x-1)(x-2)}{-1(-1-1)(-1-2)} + 0{,}5\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)} \\
&\quad - 1{,}0\frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)1(1-2)} - 1{,}5\frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)2(2-1)} \\
&= -\frac{1}{2}(x^3-3x^2+2x) + \frac{1}{4}(x^3-2x^2-x+2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(x^3-x^2-2x) - \frac{1}{4}(x^3-x) \\
&= 0{,}5x^2 - 2{,}0x + 0{,}5
\end{aligned}$$

- *Newtons interpolasjonsformel:* Tabellen over dividerte differenser er gitt ved

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,\dots,x_{i+3}]$
−1,0	3,0			
		−2,5		
0,0	0,5		0,5	
		−1,5		0,0
1,0	−1,0		0,5	
		−0,5		
2,0	−1,5			

så interpolasjonspolynomet blir

$$\begin{aligned}
p(x) &= 3{,}0 - 2{,}5(x+1{,}0) + 0{,}5(x+1{,}0)x + 0{,}0(x+1{,}0)x(x-1{,}0) \\
&= 0{,}5x^2 - 2{,}0x + 0{,}5.
\end{aligned}$$

2 Vi kan skrive initialverdiproblemet på formen

$$y'' + 4y = 2\sin 2t\,\bigl[1 - u(t-\pi)\bigr], \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0. \tag{$*$}$$

La så $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$. Legg merke til at $\sin 2t = \sin 2(t-\pi)$. Laplace-transformerer så $(*)$. Det gir

$$s^2Y + 4Y = \frac{4}{s^2+4}\bigl(1-e^{-\pi s}\bigr),$$

det vil si

$$Y = \frac{4}{(s^2+4)^2}\bigl(1-e^{-\pi s}\bigr).$$

Ettersom

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s^2+4)^2}\right\} = \sin 2t * \sin 2t = \frac{1}{4}\bigl(\sin 2t - 2t\cos 2t\bigr),$$

gir andre forskyningsteorem at

$$\begin{aligned} y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \frac{1}{4}\big(\sin 2t - 2t\cos 2t\big) - \frac{1}{4}\big(\sin 2(t-\pi) - 2(t-\pi)\cos 2(t-\pi)\big)u(t-\pi) \\ &= \frac{1}{4}\big(\sin 2t - 2t\cos 2t\big) - \frac{1}{4}\big(\sin 2t - 2(t-\pi)\cos 2t\big)u(t-\pi) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4}\big(\sin 2t - 2t\cos 2t\big) & \text{for } 0 \le t < \pi, \\ -\frac{\pi}{2}\cos 2t & \text{for } t > \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

3 Den retningsderiverte til $f(x,y)$ i punktet $(1,1)$ langs vektoren $\mathbf{a}$ kan uttrykkes som

$$D_{\mathbf{a}}f(1,1) = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \bullet \nabla f(1,1).$$

Med andre ord, vil $D_{\mathbf{e}}f(1,1) = 0$ for de enhetsvektorene $\mathbf{e}$ som står ortogonalt på $\nabla f(1,1)$. Gradienten til $f(x,y) = \ln(x^2 + e^{2xy})$ er gitt ved

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = \frac{2}{x^2 + e^{2xy}}\big((x + ye^{2xy})\mathbf{i} + xe^{2xy}\mathbf{j}\big),$$

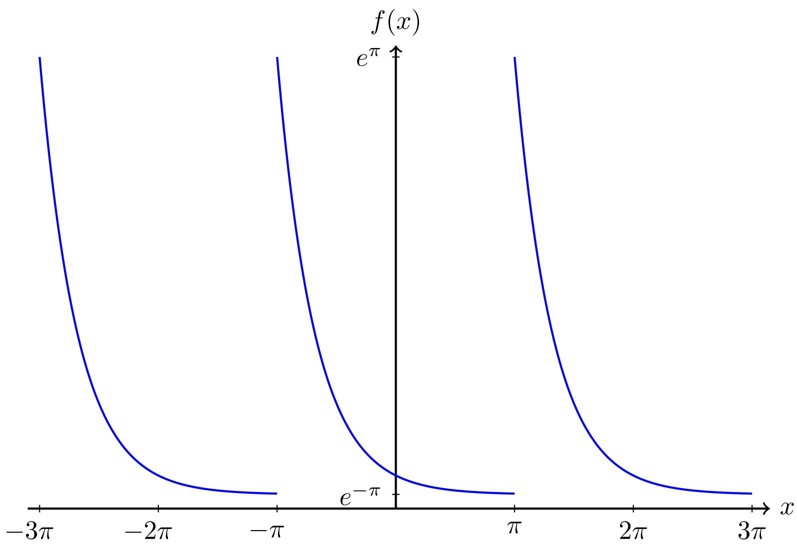
slik at

$$\nabla f(1,1) = \frac{2}{1+e^2}\big((1+e^2)\mathbf{i} + e^2\mathbf{j}\big).$$

Altså er

$$\mathbf{e} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + 2e^2 + 2e^4}}\big(-e^2\mathbf{i} + (1+e^2)\mathbf{j}\big).$$

4 **a)** Grafen til den 2π-periodiske utvidelsen til $f(x)$ er gitt ved figuren under.



Den komplekse Fourier-rekken til $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

der

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{1+in}e^{-(1+in)x}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{1+in}e^{-\pi}e^{-in\pi} + \frac{1}{1+in}e^{\pi}e^{in\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+in}(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi}) \\ &= \frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n(1-in)}{1+n^2}. \end{aligned}$$

Altså er den komplekse Fourier-rekken til $f(x)$ gitt ved

$$f(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-in)}{1+n^2} e^{inx}.$$

b) Ettersom $f(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$ får vi at

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n(1-in)}{1+n^2} \\ &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(\cdots - \frac{1+3i}{1+3^2} + \frac{1+2i}{1+2^2} - \frac{1+i}{1+1^2} + 1 - \frac{1-i}{1+1^2} + \frac{1-2i}{1+2^2} - \frac{1-3i}{1+3^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{2\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \end{aligned}$$

slik at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\sinh \pi}.$$

Ettersom $f(x)$ har et sprang i $x = \pi$ får vi at

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\big[f(\pi^+) + f(\pi^-)\big] = \cosh \pi &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n(1-in)}{1+n^2} e^{in\pi} \\ &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n(1-in)}{1+n^2} (-1)^n \\ &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1-in}{1+n^2} \\ &= \frac{2\sinh \pi}{\pi} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right), \end{aligned}$$

slik at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \cosh \pi}{2 \sinh \pi} - 1 = \frac{\pi}{2\tanh \pi} - 1.$$

$\boxed{5}$ Integralligningen kan skrives på formen

$$f(x) - (f * g)(x) = e^{-|x|}, \qquad g(x) = e^{-4|x|}. \tag{$*$}$$

La så $\hat{f}(w) = \mathscr{F}(f)$. Fourier-transformerer så $(*)$. Det gir

$$\hat{f}(w) - \sqrt{2\pi}\hat{f}(w) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4}{w^2+16} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^2+1},$$

det vil si

$$\left(1 - \frac{8}{w^2+16}\right)\hat{f}(w) = \frac{w^2+8}{w^2+16}\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^2+1}.$$

Altså har vi at

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w^2+16}{(w^2+1)(w^2+8)}.$$

Delbrøkoppspalting gir så

$$\begin{aligned} \frac{w^2+16}{(w^2+1)(w^2+8)} &= \frac{1}{w^2+1} + \frac{8}{(w^2+1)(w^2+8)} = \frac{1}{w^2+1} + \frac{8}{7}\left(\frac{1}{w^2+1} - \frac{1}{w^2+8}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(\frac{15}{w^2+1} - \frac{8}{w^2+8}\right). \end{aligned}$$

Finner så $f(x)$ ved å ta inverstransformasjonen, det vil si

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{7}\left(15e^{-|x|} - \frac{8}{2\sqrt{2}}e^{-2\sqrt{2}|x|}\right) = \frac{1}{7}\big(15e^{-|x|} - 2\sqrt{2}e^{-2\sqrt{2}|x|}\big).$$

$\boxed{6}$ **a)** Setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i $u_t = u_{xx} + 2u$. Det gir

$$F(x)\dot{G}(t) = F''(x)G(t) + 2F(x)G(t) \quad \text{det vil si} \quad F''(x)G(t) = F(x)\big(\dot{G}(t) - 2G(t)\big),$$

slik at

$$\underbrace{\frac{F''(x)}{F(x)}}_{k} = \underbrace{\frac{\dot{G}(t) - 2G(t)}{G(t)}}_{k}.$$

Dette gir følgende to 2. ordens ordinære differensialligninger

$$F''(x) - kF(x) = 0, \tag{1}$$

$$\dot{G}(t) - (k+2)G(t) = 0. \tag{2}$$

Løser så (1), gitt randbetingelsene $u_x(0,t) = 0$ og $u_x(\pi,t) = 0$, det vil si $F'(0) = 0$ og $F'(\pi) = 0$. Med andre ord,

$$F''(x) - kF(x) = 0, \qquad F'(0) = 0, \quad F'(\pi) = 0. \tag{1'}$$

Vi har tre muligheter for k:

(i) $k = p^2 > 0$: Innsatt for $k = p^2$ i (1′) får vi

$$F''(x) - p^2F(x) = 0.$$

Denne ligningen har løsning

$$F(x) = Ae^{px} + Be^{-px}.$$

Ettersom

$$F'(x) = p\big(Ae^{px} - Be^{-px}\big),$$

gir $F'(0) = 0$ at $A = B$. Fra $F'(\pi) = 0$ får vi

$$F'(\pi) = Ap(e^{p\pi} - e^{-p\pi}) = 2Ap\sinh p\pi = 0.$$

Altså må $A = 0$. Dermed står vi kun igjen med den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$. Altså er $k \leq 0$.

(ii) $k = 0$: Innsatt for $k = 0$ i (1′) får vi

$$F''(x) = 0,$$

som har løsning $F(x) = Ax + B$. Fra $F'(0) = 0$ og $F'(\pi) = 0$ får vi $A = 0$. Altså står vi igjen med løsningen $F(x) = \text{konstant}$.

(iii) $k = -p^2 < 0$: Innsatt for $k = -p^2$ i (1′) får vi

$$F''(x) + p^2F(x) = 0,$$

som har løsning

$$F(x) = A\cos px + B\sin px.$$

Ettersom

$$F'(x) = p\big(B\cos px - A\sin px\big),$$

får vi at $F'(0) = Bp = 0$, det vil si $B = 0$. Altså har vi at $F(x) = A\cos px$. Fra $F'(\pi) = 0$, får vi

$$F'(\pi) = -pA\sin p\pi = 0.$$

Ettersom $A = 0$ kun gir den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$, ser vi på tilfellet der $\sin p\pi = 0$. Det gir $p = n = 1, 2, 3, \ldots$. Altså er $k = -n^2$.

Ved å kombinere (ii) og (iii) har vi funnet at alle mulige løsninger for (1′), gitt våre randbetingelser, er på formen

$$F_n(x) = \tilde{A}_n \cos nx, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Setter så inn for $k = -n^2$ i (2). Det gir

$$\dot{G}(t) + (n^2 - 2)G(t) = 0 \quad \text{det vil si} \quad \dot{G}(t) = (2 - n^2)G(t),$$

som har løsning

$$G_n(t) = C_n e^{(2-n^2)t}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Altså er alle løsninger på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$, som tilfredstiller $u_t = u_{xx} + 2u$ og de gitte randbetingelsene, gitt ved

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)G_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{(2-n^2)t} \cos nx.$$

b) Legg merke til at $\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos 2x\big)$, slik at

$$u(x,0) = (\cos x + 1)^2 = \cos^2 x + 2\cos x + 1 = \frac{3}{2} + 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

De løsningene vi fant i oppgave **a)** som i tillegg tilfredstiller initialbetingelsen gitt over, er da gitt ved

$$u(x,t) = \frac{3}{2}e^{2t} + 2e^t \cos x + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 2x.$$

$\boxed{7}$ La $y_1 = y$ og $y_2 = y'$. Da blir ligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= \frac{\pi}{2}, \\ y_2' &= \sin y_1, & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Et skritt med trapesmetoden på denne ligningen er gitt ved

$$\begin{aligned} y_{1,n+1} &= y_{1,n} + \frac{h}{2}(y_{2,n} + y_{2,n+1}), \\ y_{2,n+1} &= y_{2,n} + \frac{h}{2}\big(\sin y_{1,n} + \sin y_{1,n+1}\big). \end{aligned}$$

Med $h = 0{,}1$, $n = 0$ og $y_{1,0} = \frac{\pi}{2}$, $y_{2,0} = 0$ blir dette

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{20}y_{2,1} \\ y_{2,1} &= \frac{1}{20}\big(1 + \sin y_{1,1}\big) \end{aligned} \qquad \text{eller} \qquad \begin{aligned} 20y_{1,1} - y_{2,1} - 10\pi &= 0 \\ \sin y_{1,1} - 20y_{2,1} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

$\boxed{8}$ Her er

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 20 & -1 \\ \cos(x_1) & -20 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 20x_1 - x_2 - 10\pi \\ \sin(x_1) - 20x_2 + 1 \end{bmatrix}.$$

Med oppgitte startverdier blir $J(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})$ til

$$\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

med løsning $\Delta x_2 = \frac{1}{10} = 0{,}1$ og $\Delta x_1 = \frac{1}{200} = 0{,}0005$. Dermed blir

$$x_1^{(1)} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{200} \approx 1{,}5758, \qquad x_2^{(1)} = 0{,}1000.$$

$\boxed{9}$ Differanseskjemaet blir for $U_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{ij}}{k} = \kappa \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + x_i(1 - x_i)$$

eller

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \kappa \frac{k}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + kx_i(1 - x_i),$$

for $i = 1, 2, \ldots, N-1$, og $j = 0, 1, 2, \ldots$, og med

$$U_{i,0} = \sin \pi x_i = \sin i\pi h, \qquad U_{0,j} = U_{N,j} = 0.$$

Med $\kappa = 0{,}1$, $h = 0{,}25$ og $k = 0{,}2$ blir dette ($x_i = 0{,}25i$)

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + 0{,}32(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + 0{,}05i(1 - 0{,}25i).$$

Med startverdiene

$$U_{0,0} = 0,\ U_{1,0} = \sin \frac{\pi}{4} \approx 0{,}70711,\ U_{2,0} = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$
$$U_{3,0} = \sin \frac{3\pi}{4} \approx 0{,}70711,\ U_{4,0} = \sin \pi = 0$$

ender vi med

$$u(0{,}25,\ 0{,}2) \approx U_{1,1} \approx 0{,}6121,$$
$$u(0{,}50,\ 0{,}2) \approx U_{2,1} \approx 0{,}8625,$$
$$u(0{,}75,\ 0{,}2) \approx U_{3,1} \approx 0{,}6121.$$