

- 1 a) Vi tar Laplacetransformen til hele ligningen og får

$$s^2Y - s + \omega^2Y = \frac{1}{s}e^{-s}.$$

Litt algebra gir

$$Y = \frac{e^{-s}}{s(s^2 + \omega^2)} + \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Delbrøkkoppspalting gir

$$Y = \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) e^{-s} + \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Inversjon gir

$$y(t) = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega(t-1)) u(t-1) + \cos \omega t.$$

- b) Vi tar Laplacetransformen til hele ligningen og får

$$sY - 1 - Y + \frac{1}{s-1}Y = \frac{1}{s-1}.$$

Multipliserer med  $s-1$  og får

$$s(s-1)Y - (s-1) - (s-1)Y + Y = 1.$$

Litt algebra gir

$$Y = \frac{s}{s^2 - 2s + 2}.$$

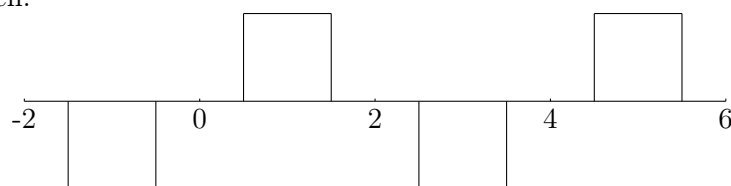
Dette kan vi skrive som

$$Y = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} + \frac{1}{(s-1)^2 + 1}.$$

Inversjon gir

$$y(t) = e^t(\cos t + \sin t).$$

2 a) Grafen.



b) Dersom vi antar at  $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ , har vi

$$f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left( \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{1} - \frac{\sin(3\frac{\pi}{2}x)}{3} - \frac{\sin(5\frac{\pi}{2}x)}{5} + \frac{\sin(7\frac{\pi}{2}x)}{7} + \frac{\sin(9\frac{\pi}{2}x)}{9} - \dots \right).$$

Setter vi  $x = 1$  får vi

$$1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} S_1.$$

Altså er

$$S_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Setter vi  $x = \frac{1}{2}$  får vi

$$\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right) = \frac{2}{\pi} S_2.$$

Altså er

$$S_2 = \frac{\pi}{4}.$$

3 a) Vi setter  $u(x, t) = F(x)G(t)$  inn i ligning (1). Da får vi

$$F''G = FG'.$$

Deler vi med  $FG$  får vi

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)}.$$

Siden  $x$  og  $t$  er frie variable må begge sider være en og samme konstant, altså

$$F''(x) = kF(x) \quad \text{og} \quad G'(t) = kG(t).$$

Løser vi disse ligningene og setter inn randbetingelsene får vi ikke-trivielle løsninger kun når  $k = -p^2$  og  $\sin(2p) = 0$ , som viser at vi må ha  $p = n\frac{\pi}{2}$  for  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Løsningene blir opp til multiplikasjon med en konstant,

$$u_n(x, t) = e^{-(n\frac{\pi}{2})^2 t} \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right).$$

- b) Siden ligningen og randbetingelsene er lineære og homogene kan vi bruke superposisjonsprinsippet. Det vil si at en lineær kombinasjon

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{-(n\frac{\pi}{2})^2 t} \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)$$

er løsning av (1) og (2). Setter vi  $t = 0$  og sammenligner med initialbetingelsen (3) får vi

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5 \sin\left(5\frac{\pi}{2}x\right).$$

Dette viser at  $b_n = 0$  unntatt for  $n = 1$  og  $n = 5$ , og at

$$u(x, t) = e^{-(\frac{\pi}{2})^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5e^{-(5\frac{\pi}{2})^2 t} \sin\left(5\frac{\pi}{2}x\right).$$

- 4 a) Vi må vise at  $f^{\text{even}}(-x) = f^{\text{even}}(x)$  og at  $f^{\text{odd}}(-x) = -f^{\text{odd}}(x)$ . Dette sees umiddelbart ved innsetting. Vi har at  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . Vi vet at  $\cos x$  er en likefunksjon og  $\sin x$  er en oddefunksjon. Funksjonen  $e^{-|x|}$  er en likefunksjon. Siden produktet av to likefunksjoner er en likefunksjon og produktet av en likefunksjon og en oddefunksjon er en oddefunksjon har vi

$$e^{-|x|} e^{-ix} = e^{-|x|} \cos x - i e^{-|x|} \sin x.$$

Alternativt kan vi konstruere

$$\begin{aligned} f^{\text{even}}(x) &= \frac{1}{2} \left( e^{-|x|} e^{-ix} + e^{-|x|} e^{-i(-x)} \right) = e^{-|x|} \cos x, \\ f^{\text{odd}}(x) &= \frac{1}{2} \left( e^{-|x|} e^{-ix} - e^{-|x|} e^{-i(-x)} \right) = -i e^{-|x|} \sin x. \end{aligned}$$

Siden  $f(x) = f^{\text{even}}(x) + f^{\text{odd}}(x)$  får vi samme resultat som ovenfor.

- b) Anta at  $f$  er odde. Da er  $f(x)e^{-ixw} = -if(x) \sin xw + f(x) \cos xw$ . Her er  $f(x) \cos xw$  en oddefunksjon, så  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos xw dx = 0$ . Følgelig er

$$\mathcal{F}(f(x)) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin xw dx,$$

og dette er en oddefunksjon siden  $\sin xw$  er en oddefunksjon av  $w$  for alle  $x$ . Tilsvarende for en likefunksjon.

- c)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x)e^{-iax})(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iax} e^{-ixw} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix(w+a)} dx \\ &= \mathcal{F}(f(x))(w+a). \end{aligned}$$

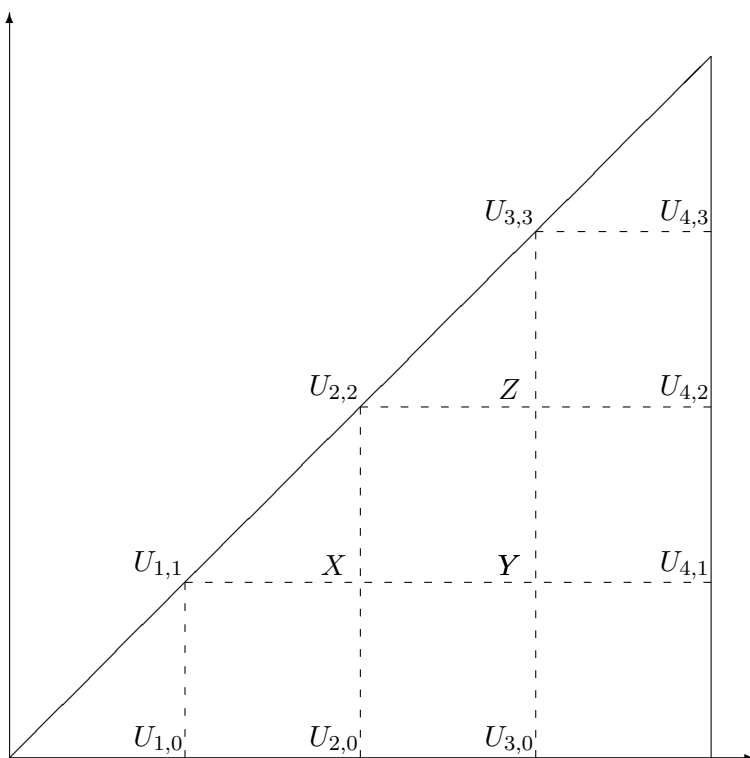
d) Inversjon gir

$$\begin{aligned} e^{-|x|} \cos x &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{w^2 + 2}{w^4 + 4} \right) (x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{w^2 + 2}{w^4 + 4} \right) e^{ixw} dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 + 2}{w^4 + 4} \cos xw dw = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w^2 + 2}{w^4 + 4} \cos xw dw. \end{aligned}$$

Setter vi  $x = 0$  får vi

$$\int_0^{\infty} \frac{w^2 + 2}{w^4 + 4} dw = \frac{\pi}{2}.$$

5 Området  $R$  med grid.



Verdiene på randen er

$$U_{4,1} = U_{4,2} = U_{4,3} = U_{1,1} = U_{2,2} = U_{3,3} = 0, \quad U_{1,0} = U_{3,0} = 3 \quad \text{og} \quad U_{2,0} = 4.$$

Bruk av 5-punktsformelen på de indre punktene  $U_{2,1}$ ,  $U_{3,1}$  og  $U_{3,2}$  gir:

$$\begin{aligned} U_{3,1} + U_{1,1} + U_{2,2} + U_{2,0} - 4U_{2,1} &= 0 \\ U_{4,1} + U_{2,1} + U_{3,2} + U_{3,0} - 4U_{3,1} &= 0 \\ U_{4,2} + U_{2,2} + U_{3,3} + U_{3,1} - 4U_{3,2} &= 0 \end{aligned}$$

Vi har her valgt å liste opp ligningene i naturlig orden.

Ved å benytte de kjente verdiene på randen og definere de ukjente verdiene som  $X = U_{2,1}$ ,  $Y = U_{3,1}$  og  $Z = U_{3,2}$ , reduserer ligningene seg til

$$\begin{aligned} 4X - Y &= 4 \\ -X + 4Y - Z &= 3 \\ -Y + 4Z &= 0 \end{aligned}$$

Disse ligningene kan også skrives på matrisform som

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6 Vi skriver de tre ligningene på følgende form:

$$\begin{aligned} 4x &= 4 + y \\ 4y &= 3 + x + z \\ 4z &= y \end{aligned}$$

Gauss-Seidel gir da (bruker hele tiden sist tilgjengelige informasjon):

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (4 + y^{(n)}) \\ y^{(n+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (3 + x^{(n+1)} + z^{(n)}) \\ z^{(n+1)} &= \frac{1}{4} \cdot y^{(n+1)} \end{aligned}$$

Med de gitte startverdiene ( $n = 0$ ) får vi da:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot (4 + 1) = \frac{5}{4} = 1.25 \\ y^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot (3 + \frac{5}{4} + 0) = \frac{17}{16} = 1.06 \\ z^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{17}{16} = \frac{17}{64} = 0.266 \end{aligned}$$

Løsningsvektoren etter en iterasjon er altså  $(5/4, 17/16, 17/64)^T$ .

7 Differansetabellen blir seende slik ut.

$x_j$	$f_j = f[x_j]$	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_{j+4}]$
-1	1				
		-1			
1	-1		1		
		2		0	
2	1		1		0
		4		0	
3	5		1		
		7			
5	19				

Dividerte differanser på det gitte datasettet gir:

$$\begin{aligned}f_0 &= 1 \\f[x_0, x_1] &= -1 \\f[x_0, x_1, x_2] &= 1 \\f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= 0 \\f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] &= 0\end{aligned}$$

Interpolasjonspolynomet er dermed gitt som:

$$\begin{aligned}p(x) &= f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\&\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\&\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\&= 1 + (x - (-1)) \cdot (-1) + (x - (-1))(x - 1) \cdot 1 \\&\quad + (x - (-1))(x - 1)(x - 2) \cdot 0 + (x - (-1))(x - 1)(x - 2)(x - 3) \cdot 0 \\&= x^2 - x - 1.\end{aligned}$$