PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINER (PDE)

En **PDE** er en ligning for en ukjent funksjon $u : D \to \mathbb{R}$ som inneholder partiellderiverte av u. Altså, u avhenger av **flere enn en variabel.**

Ex: $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

PDE: $$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) \qquad (*)$$

En enklere notasjon for denne PDE'en er

$$u_{xy} = u_x.$$

Lösning: La $p(x,y) := \frac{\partial}{\partial x} u(x,y)$.
$(*)$ kan da skrives som

$$p_y = -p.$$

For hver $x \in \mathbb{R}$, så er altså $p(x,y) = c e^{-y}$ men konstanten c kan være forskjellig for forskjellige x'er. Dvs.

$$p(x,y) = c(x) e^{-y}$$

for en eller annen funksjon $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

SJEKK: $\frac{\partial}{\partial y} p = c \frac{d}{dy} e^{-y} = -c e^{-y} = -p$

Nå er

$$u_x(x,y) = p(x,y) = c(x) e^{-y}$$

som må bety at

$$u(x,y) = g(y) + \int_0^x c(t)\,dt\, e^{-y}.$$

$\int_0^x c(t)\,dt := f(x)$

Dvs.

$$\underline{\underline{u(x,y) = g(y) + f(x)e^{-y}}}$$

for en funksjon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

SJEKK: $u_x(x,y) = 0 + f'(x)e^{-y}$

$u_{xy}(x,y) = -f'(x)e^{-y} = -u_x(x,y)$ **ok!**

Ofte er domenet til u på formen

$$D = \Omega \times (0,T)$$

der

$\Omega \subseteq \mathbb{R}$ er et intervall på x-aksen,

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ er et område i x,y-planet, eller

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ er et område i rommet (x,y,z).

Intervallet $(0,T)$ tenker vi ofte på som et

<u>tidsintervall</u>

<u>Ex</u>: Temperaturen inne i en ball med radius 1,

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$$

mellom kl. 0 og 3 definerer en funksjon

$$u : \Omega \times (0,3) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Altså, temperaturen i punktet $(x,y,z) \in \Omega$ ved tiden $t \in (0,3]$ er $u(x,y,z,t)$.

Laplace-operatoren

Den viktigste differensialoperatoren er, uten sammenligning, Laplace-operatoren Δ.

Definisjon La $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ være et åpent område. Da er $\Delta : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ gitt ved

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}.$$

Altså,

$n=1$: $\Delta u(x) = u''(x)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$

$n=2$: $\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$n=3$: $\Delta u(x,y,z) = u_{xx}(x,y,z) + u_{yy}(x,y,z) + u_{zz}(x,y,z)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

Oppgave: Regn ut funksjonen $\Delta u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ når $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $u(x,y) = x \sin 2y + e^{xy}$

Lösning: $u_x = \sin 2y + y e^{xy}$, $u_{xx} = y^2 e^{xy}$

$u_y = 2x \cos 2y + x e^{xy}$, $u_{yy} = -4x \sin 2y + x^2 e^{xy}$.

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \\ &= (x^2+y^2)e^{xy} - 4x \sin 2y. \end{aligned}$$

Konvensjon: Selv om u avhenger av en tidsvariabel t, så anvender Δ bare på de 'romlige' variablene. Feks. $u : \mathbb{R}^2 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$. $\Delta u(x,y,t) := u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)$.

Vi skal se på de tre viktigste PDE'ene:

$u : \Omega \to \mathbb{R}$

$u : \Omega \times (0,T)$ {

$\Delta u = 0$	Laplace-ligningen
$\Delta u = u_t$	Varmeligningen
$\Delta u = u_{tt}$	Bölgeligningen.

De tre ligningene over er alle **lineære**.
Det fine med lineære ligninger er at enhver **lineærkombinasjon** $u(x) := \sum_n c_n v_n(x)$ av **lösninger** v_n **er** igjen **en lösning**.

Indeks, ikke partiellderivert!

<u>Oppgave</u>: Vis at funksjonen

$$u(x,t) := \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

er en lösning av varmeligningen på $\Omega \times (0,\infty) = \mathbb{R} \times (0,\infty)$.

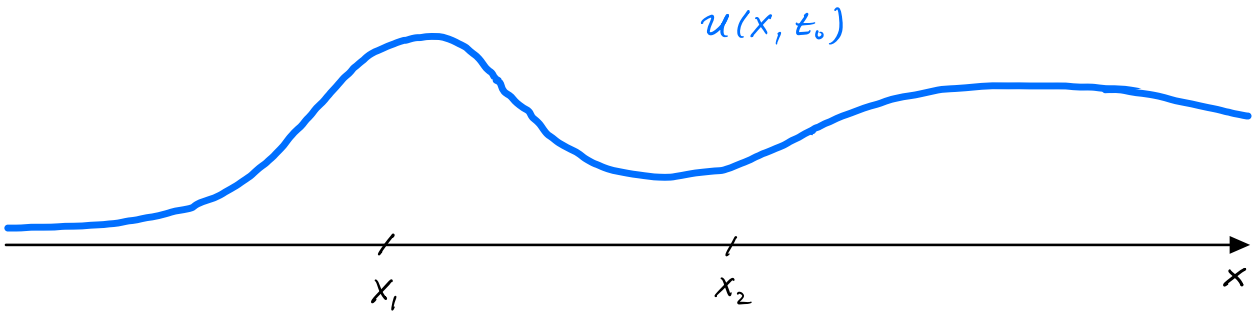
VARMELIGNINGEN

En funksjon $u: \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, sies å tilfredsstille varmeligningen hvis

$$\Delta u = u_t. \qquad (1)$$

Det viser seg at løsninger u av (1) beskriver hvordan varme beveger seg i et homogent materiale.

Intuitivt: La $n=1$ og la x-aksen være en isolert metallstang som ved tiden t i punktet x har temperatur $u(x,t)$.

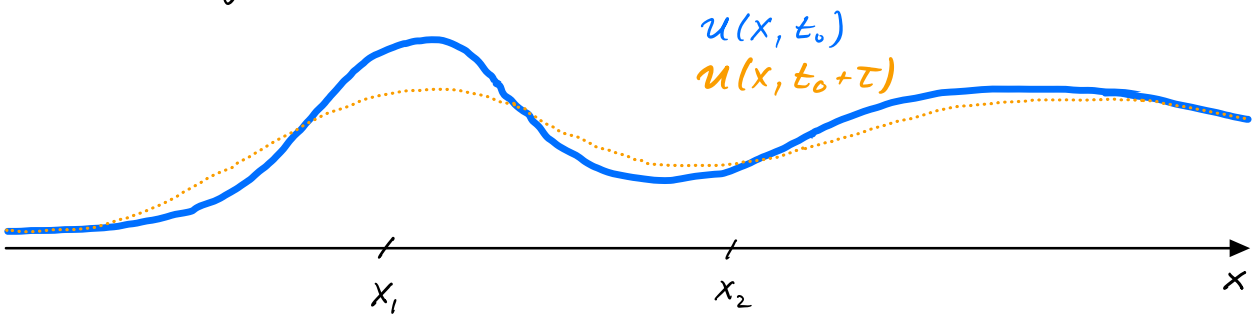


Grafen over viser temperaturen i stangen i et gitt tidspunkt t_0. Hvordan vil grafen se ut i tiden $t_0 + \tau$, ($\tau > 0$ liten)?

I punktet x_1 ser vi at $\Delta u(x_1, t_0) < 0$. (sur graf)

Det betyr at temperaturen $u(x_1, t_0)$ i x_1 er høyere enn den gjennomsnittelige temperaturen i nærheten. Det er derfor rimelig å anta

at u vil synke. Dvs. $u_t(x_1, t_0) < 0$ og $u(x_1, t_0+\tau) < u(x_1, t_0)$.
I x_2 er $\Delta u > 0$ og u vil stige: $u_t(x_2, t_0) > 0$.
Det er også rimelig å tro at temperaturen vil forandre seg raskere når det er stor krumning i grafen. Altså $\Delta u \sim u_t$.



Litt vektor-Kalkulus $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Skalar funksjon $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Gradient: $\nabla u : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$\nabla u(\bar{x}) := (u_{x_1}(\bar{x}), \dots, u_{x_n}(\bar{x}))$$

rad-vektor.

Vektorfelt: $\bar{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\bar{f}(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^n(x) \end{pmatrix}$

Jacobi-matrise $\nabla \bar{f} : \Omega \to \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\nabla \bar{f}(\bar{x}) := \begin{pmatrix} \nabla f^1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f^n(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Trase av $n \times n$-matrise:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Divergens av vektorfelt: $\operatorname{div} \bar{f} : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{div} \bar{f}(\bar{x}) := \operatorname{tr} \nabla \bar{f}(\bar{x})$$

$$= f_{x_1}^1(\bar{x}) + f_{x_2}^2(\bar{x}) + \cdots + f_{x_n}^n(\bar{x}).$$

Laplace-operatoren kan skrives som

$$\Delta u(\bar{x}) = \operatorname{div} \nabla u(\bar{x}).$$

Bevis: $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n})$

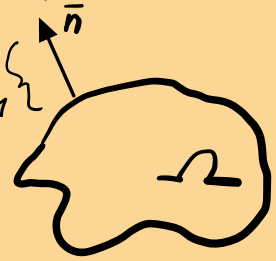
så $\operatorname{div} \nabla u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}$

$$= \Delta u. \qquad \text{II}$$

Divergens-teoremet: La $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ være et begrenset område med glatt rand $\partial\Omega$. La $\bar{n} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ være enhetsvektoren som står normalt på randen og peker ut av området. Da er

$$\int_\Omega \operatorname{div} \bar{f}(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_{\partial\Omega} \bar{f}^T(\bar{x})\, \bar{n}(\bar{x})\, dS(\bar{x})$$

for alle $\bar{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$.



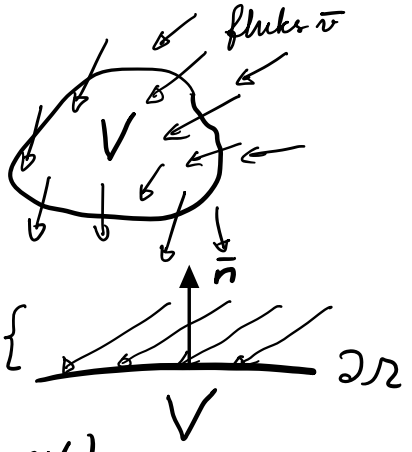
Utledning av varmeligningen for generell $n = 1, 2, 3$

Observasjoner viser at **varmefluksen** $\bar{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ i et homogent materiale peker i den retningen temperaturen synker mest. Dvs. i retning $-\nabla u$. I tillegg er styrken på fluksen $|\bar{v}|$ proposjonal med $|\nabla u|$. Altså

$$\bar{v} = -\nabla u$$

når vi setter proposjonalitetskonstanten til 1.

La $V \subseteq \Omega$ være et begrenset delområde av Ω med rand ∂V.



Varmen som strömmer inn i V gjennom et lite arealelement dS av randen $\partial\Omega$, er

$$-\bar{v}^T\bar{n}\,dS$$

så den totale mengden varme som strömmer inn (eller ut) av V pr. tidsenhet er

$$-\int_{\partial V} \bar{v}^T\bar{n}\,dS = -\int_V \operatorname{div}\bar{v}\,d\bar{x} \qquad \text{DIVERGENS-TEOREMET}$$

$$= \int_V \operatorname{div}\nabla u\,d\bar{x}$$

$$= \int_V \Delta u\,d\bar{x}$$

Dette tallet må være lik forandringen av varme i V. Varmen er proposjonal med temperaturen u, så

$$\int_V \Delta u(\bar{x},t)\,d\bar{x} = \frac{d}{dt}\int_V u(\bar{x},t)\,d\bar{x} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} u(\bar{x},t)\,d\bar{x}.$$

Vi setter igjen proposjonalitets-konstanten til 1.

Ettersom dette gjelder for alle delområder $V \subseteq \Omega$ (uansett hvor små) så må integrandene være like. Dvs. $\Delta u = u_t$.

Å løse varmeligningen v.h.a. Fourier-rekker. n=1.

Vi skal nå forsøke å løse følgende problem. En isolert stang med lengde L har, ved tiden $t=0$, temperatur $f(x)$ i punktet $x \in [0,L]$. I tillegg finnes en innretning som holder stangens ender på konstant 0 grader.

> Hva er stangens temperaturfordeling i fremtiden?

La temperaturen i punktet x ved tiden t være $u(x,t)$. Vi antar at u tilfredsstiller varmeligningen $\Delta u = u_t$.

Problemet er altså, Finn $u: [0,L]\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ slik at

$$(**)\begin{cases} u_{xx} = u_t & \text{for } (x,t)\in(0,L)\times(0,\infty). \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \geq 0. \ (\text{Randbetingelse}) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x\in[0,L] \ (\text{Initialbetingelse}) \end{cases}$$

En vanlig strategi når man leter eller løsninger av PDE'er, er å forsøke å forenkle situasjonen ved å anta at u er på en spesiell form. Noen ganger lykkes man, andre ganger ikke.

Ansatz: Anta $\exists\, F:[0,L]\to\mathbb{R}$ og $G:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ slik at

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

Hvis dette er riktig, så må

$$F''(x)G(t) = u_{xx}(x,t) = u_t(x,t) = F(x)G'(t).$$

En videre antagelse om $F\neq 0\neq G$ leder da til

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)} =: k$$

som hverken avhenger av x eller t. Dvs. k er konstant. Vi har dermed redusert PDE'en $(**)$ til to ODE'er.

ODE'en for G er $G' = kG$ med løsning $G(t) = Ce^{kt}$.

Vi forventer at $u(x,t)\to 0$ når $t\to\infty$ (Hvorfor?)

Med $k>0$ vil $G(t)\to\pm\infty$ som passer dårlig.

$k=0$ gir $G(t)=$ konstant som heller ikke vil løse

problemet. Den eneste gjenværende muligheten er da $k =: -\lambda^2 < 0$. Altså

$$F''(x) = -\lambda^2 F(x), \qquad G'(t) = -\lambda^2 G(t)$$

med generelle løsninger

$$F(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x, \quad G(t) = Ce^{-\lambda^2 t}$$

Fra randbetingelsene i (**) må vi ha

$$0 = u(0,t) = F(0)G(t) \qquad \text{og}$$
$$0 = u(L,t) = F(L)G(t).$$

Vi vil ikke ha $G(t)$ konstant lik 0, så

$$0 = F(0) = B \qquad \text{og}$$
$$0 = F(L) = A\sin\lambda L.$$

Dette begrenser mulige $\lambda > 0$. Vi må ha $\lambda L = n\pi$, dvs.

$$\lambda = \frac{\pi}{L}n =: \lambda_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Altså må F og G være på formen

$$F(x) = A\sin\lambda_n x, \quad G(t) = Ce^{-\lambda_n^2 t},$$

Det følger nå at alle funksjonene

$$v_n(x,t) := e^{-\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

løser

(i) $u_{xx} = u_t$ ✓

(ii) $u(0,t) = 0 = u(L,t)$ ✓

(iii) $u(x,0) = f(x)$. ✗

Merk at enhver lineærkombinasjon $u := \sum_n b_n v_n$ også vil løse (i) og (ii).
Velg nå b_n til å være Fourier-koeffisientene til (den odde utvidelsen av) f:

$$b_n := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \lambda_n x \, dx, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{L} n.$$

Da vil

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x$$

løse problemet (**) fordi nå er også initialbetingelsen (iii) oppfylt:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x$$

$$= f(x).$$

Vi har ikke <u>bevist</u> at u er deriverbar og at $u_{xx} = u_t$ (ikke pensum). Merk likevel at $u_N := \sum_{n=1}^{N} b_n v_n$ løser (i) og (ii) uansett hvor stor N er, og at (under passende betingelser på f)

$$\lim_{N \to \infty} u_N(x,0) = f(x) \quad \forall x \in [0, L].$$