LAPLACE- OG VARMELIGNINGER MED FOURIERS METODE

PDE'er modellerer fenomener i naturen.
Lösninger u gir oss informasjon om hvordan naturen oppförer seg.
Ofte er det ekstra betingelser på u.
Som f.eks. hva u er i starttidspunktet (Initialbetingelser), eller hva u er på randen av domenet (Randbetingelser).
Disse ekstra betingelsene reduserer antall mulige lösninger på problemet.
En stor del av teorien om PDE'er handler om å avgjöre hvilke typer ekstra betingelser som gir en, og bare en, lösning på problemet (Eksistens og Unikhet).
Dette er viktig kvalitativ kunnskap om lösninger. Den må ligge til grunn för man f.eks. försöker å finne en lösning numerisk (kvantitativ informasjon).

Vi skal nå se på noen flere tilfeller der lösninger av initial/rand-verdiproblem kan regnes ut for hånd ved hjelp av Fourier-rekker og -transformasjon. Man skal være

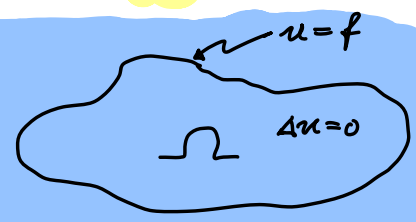
klar over at dette er unntak: For de aller fleste PDE-problemer finnes ingen <u>formel</u> for løsningen.

Dirichlet-problemet for Laplace-ligningen

Et klassisk randverdiproblem er følgende:
La $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ være et begrenset og åpent område med rand $\partial\Omega$, og la $f: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ være en gitt kontinuerlig funksjon. Finn $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ s.a.

'Tilluknigen' av Ω: $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

DIRICHLET-PROBLEM
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } \Omega, \\ u = f & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$



Dette modellerer situasjonen der temperaturen u på overflaten $\partial\Omega$ av et legeme Ω er gitt av f. Etter at varmefordelingen har stabilisert seg ($\frac{\partial}{\partial t} u = 0$), vil temperaturen i punktet $x \in \Omega$ være $u(x)$.
I spesielle tilfeller (avhengig av randverdiene f og formen på domenet Ω) kan vi finne en løsning v.h.a. Fourier-rekker.

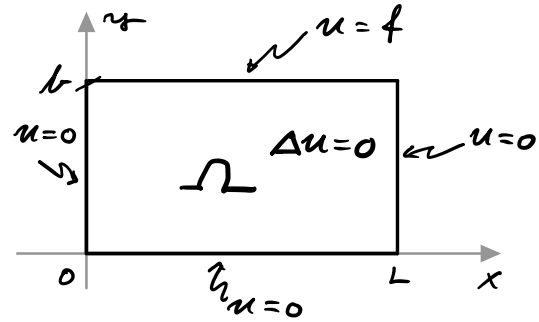
<u>Problem</u>: ($n=2$, Dirichlet, rektangulært domene)

La $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ være gitt og la

$$\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<L,\ 0<y<b\}.$$

Finn $u:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}$ slik at

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } \Omega \\ u(x,0)=u(0,y)=u(L,y)=0 \\ u(x,b)=f(x) \end{cases}$$



<u>Lösning</u>: Vi forsöker å gjöre forenklingen

$$u(x,y) = F(x)G(y).$$

Da må

$$F''(x)G(y) = u_{xx}(x,y) = -u_{yy}(x,y) = -F(x)G''(y).$$

Dvs.

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} =: k \quad \text{konstant.}$$

Vi ser for oss å gjöre Fourier i x-retning. Det gir derfor mening å forsöke med <u>negativ</u> k s.a. ODE'en til F produserer sin og cos.

$$F''(x) = -\lambda^2 F(x)$$

$$\Leftrightarrow \qquad F(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

De venstre og höyre randbetingelsene

$0 = u(0,y) = u(L,y)$ gir $0 = F(0) = A$ og
$0 = F(L) = B \sin \lambda L$

Dvs.
$$\lambda = \lambda_n := \frac{\pi}{L} n$$

ODE'ene $G''(y) = \lambda_n^2 G(y)$ har løsninger

$$G_n(y) = C_n \cosh \lambda_n y + D_n \sinh \lambda_n y,$$

og randbetingelsen $0 = u(x,0) = F(x)G(0)$
gir $0 = G_n(y) = C_n$.
Altså, funksjonene

$$u_n(x,y) := F_n(x) G_n(y)$$
$$= \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y$$

er harmoniske ($\Delta u_n = 0$) og null på trekanter.
Det vil også alle lineærkombinasjoner av u_n'ene være.
La derfor
$$b_n := \frac{2}{\pi} \int_0^L f(x) \sin \lambda_n x \, dx$$

være Fourier-koeffisientene til (den odde utvidelsen av) f. Vi ønsker å finne A_n^* s.a.

$$u(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* u_n(x,y) \quad \text{tilfredsstiller}$$

$$f(x) = u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n b$$

Dvs $A_n^* = \dfrac{b_n}{\sinh \lambda_n b}$.

Altså,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sinh \lambda_n b} \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y.$$