

Newtons metode for ikke-lineære systemer

Se på følgende ligningssystem

$$(*) \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

To ligninger og to ukjente x, y .

Systemet har to løsninger $\bar{x}_1 = (1, 0)$ og $\bar{x}_2 = (0, 1)$, som, akkurat i dette tilfellet, enkelt kan finnes ved inretningsmetoden: $y = 1 - x$, $0 = x^2 + (1-x)^2 - 1 = 2x(x-1)$.

Definer de to funksjonene $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ og $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som

$$f_1(\bar{x}) := x^2 + y^2 - 1 \quad \text{og} \quad f_2(\bar{x}) := x + y - 1.$$

der $\bar{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. (*) kan da skrives som

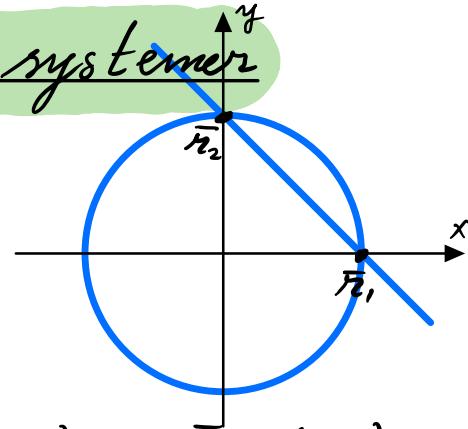
$$\begin{cases} f_1(\bar{x}) = 0, \\ f_2(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

La $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være funksjonen gitt ved

$$\bar{f}(\bar{x}) := \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \end{pmatrix}. \quad (*) \text{ kan da skrives som}$$

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{0}.$$

Informasjonen om hvordan \bar{f} forandrer seg i et gitt punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ er bestemt av de partiellderiverte av f_1 og f_2 i \bar{x} . Vi samler disse fire tallene i



i en 2×2 -matrise: **Jacobi-matrisen til \bar{f}** .

Definisjon: La $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \end{pmatrix} \text{ der } f_1, f_2 \in C'(\mathbb{R}^2). \text{ Da er}$$

Jacobi-matrisen $\nabla \bar{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gitt ved

$$\nabla \bar{f} := \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Andre notasjoner for $\nabla \bar{f}$ er $\bar{J}(\bar{f})$, $\bar{J}_{\bar{f}}$, $D\bar{f}$, $(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j})$

På samme måte som funksjoner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kan tilnærmer av lineare funksjoner nært punkter $x_0 \in \mathbb{R}$ og $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ som henholdsvis

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{og}$$

$$u(\bar{x}) \approx u(\bar{x}_0) + \nabla u(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0),$$

så kan $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tilnærmes nær $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ som

$$\bar{f}(\bar{x}) \approx \bar{f}(\bar{x}_0) + \nabla \bar{f}(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0).$$

$\underbrace{}_{2 \times 1}$

$\underbrace{}_{2 \times 1}$

$\underbrace{}_{2 \times 2}$

$\underbrace{}_{2 \times 1}$

Dette gir oss muligheten til å definere

Newton's metode for systemer: Ved steg \bar{x}_k ,

la \bar{x}_{k+1} være løsningen av den lineare ligningen $\bar{L}_k(\bar{x}) := \bar{f}(\bar{x}_k) + \nabla \bar{f}(\bar{x}_k)(\bar{x} - \bar{x}_k) = 0$.

Dvs. $\bar{x}_{k+1} := \bar{x}_k - (\nabla \bar{f}(\bar{x}_k))^{-1} \bar{f}(\bar{x}_k).$

I stedet for å regne ut den inverse av $\nabla \bar{f}(\bar{x}_k)$ er det raskere, og numerisk mer stabilt, å bruke Pythons routine for å løse det lineære ligningsystemet

$$\nabla \bar{f}(\bar{x}_k) \bar{u}_k = -\bar{f}(\bar{x}_k)$$

for den ukjente $\bar{u}_k \in \mathbb{R}^2$, og deretter sette

$$\bar{x}_{k+1} := \bar{x}_k + \bar{u}_k.$$

Ex: Vi gjør én iterasjon fra initialverdien $\bar{x}_0 = (2, 0)$ i ligningsssystemet (\bar{x}): $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{0}$.

$$\bar{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x + y - 1 \end{pmatrix},$$

$$\nabla \bar{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}(\bar{x}_0) = \bar{f}(2, 0) = \begin{pmatrix} 2^2 + 0^2 - 1 \\ 2 + 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\nabla \bar{f}(\bar{x}_0) = \nabla \bar{f}(2, 0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

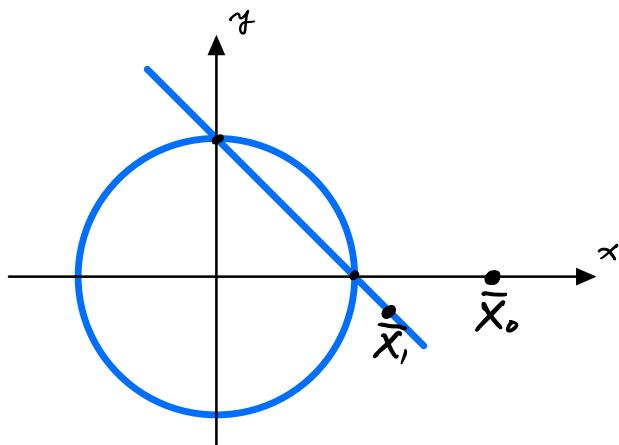
Vi løser $\nabla \bar{f}(\bar{x}_0) \bar{u}_0 = -\bar{f}(\bar{x}_0)$ for den ukjente

$$\bar{u}_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} u = -\frac{3}{4} \\ v = -\frac{1}{4}. \end{array}$$

Derved er

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \bar{u}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



- Implementering og Pythonkode } De de tilhørende
- Fixpunkt-iterasjoner } Finnes i notebook
notatene.