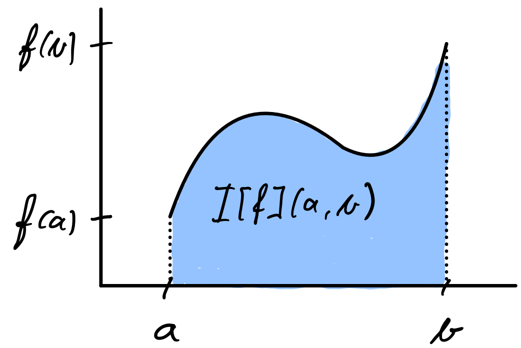
NUMERISK INTEGRASJON

TMA4135
UKE 36

Gitt en funksjon $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, hvordan finner vi tallet

$$I[f](a,b) := \int_a^b f(x)\,dx \quad ?$$



Kalkulus 1: Finn en funksjon F slik at $F'(x)=f(x)$. Da er $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

Det er mange tilfeller der dette ikke er mulig:

- f er en komplisert funksjon.
- man kjenner bare verdiene $y_i := f(x_i)$ i et endelig antall noder $x_i\in[a,b]$, $i=1,\dots,n$.

Et kvadratur Q er et uttrykk på formen

$$Q[f](a,b) := \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

der nodene $x_i\in[a,b]$ og vektene $w_i\in\mathbb{R}$ er valgt slik at $Q[f]\approx I[f]$.

Vi kan droppe å nevne intervallet (a,b) når det er underforstått fra sammenhengen. Merk at $I,Q : C[a,b]\to\mathbb{R}$ er selv funksjoner der argumentet er en $f\in C[a,b]$.

Ex: La

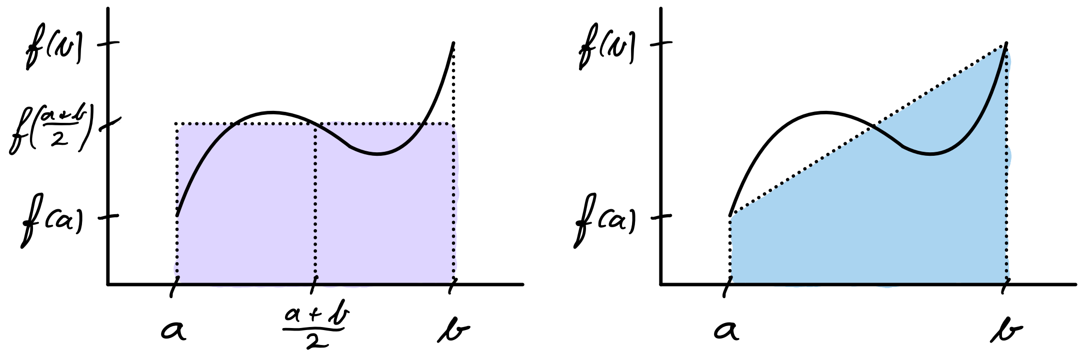
$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x), \quad \ell_i(x) := \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

være interpolasjonspolynomet til f i $n+1$ noder x_i skrevet på Lagrange-form. Ettersom $p_n\approx f$ vil også $\int_a^b p_n\,dx \approx \int_a^b f\,dx$, og

$$\begin{aligned} I[f] &= \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b \ell_i(x)\,dx. \end{aligned}$$

Dvs. $I[f] \approx Q_n[f] = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$
der vektene w_i er gitt ved
$$w_i = \int_a^b l_i(x)\,dx, \quad i=0,\dots,n.$$

Ex:



To enkle tilnærminger av $I[f]$:

- Midtpunktregelen: $n=0$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $w_0 = b-a$.
  $M[f] = w_0 f(x_0) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- Trapesregelen: $n=1$; $x_0 = a$, $x_1 = b$; $w_0 = w_1 = \frac{b-a}{2}$
  $T[f] = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$.

Merk at midtpunktsregelen og trapesregelen er lik henholdsvis kvadraturene Q_0 og Q_1 fra forrige eksempel med nodene $\{x_0\} = \{\frac{a+b}{2}\}$ og $\{x_0, x_1\} = \{a, b\}$.
Hva med Q_2, $\{x_0, x_1, x_2\} = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$?
Lagrange-polynom:
$$p_2(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}.$$
$m := \frac{a+b}{2}$

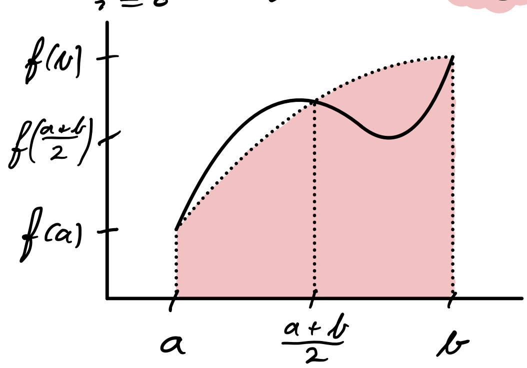
Vekten w_0 er

$$w_0 = \int_a^b l_0(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{(a-m)(a-b)} \int_a^b (x-m)(x-b)\,dx,$$
$$= \frac{2}{(b-a)^2} \int_{b-a}^{0} \left(\frac{b-a}{2} - y\right) y\,dy$$
$$= \frac{2}{(b-a)^2} \int_0^{b-a} y^2 - \frac{b-a}{2} y\,dy$$
$$= \frac{2}{(b-a)^2} \Big|_0^{b-a} \frac{1}{3} y^3 - \frac{b-a}{4} y^2$$
$$= \frac{2}{(b-a)^2} \left(\frac{1}{3}(b-a)^3 - \frac{b-a}{4}(b-a)^2\right)$$
$$= \frac{b-a}{6}.$$

SUB: $y := b-x$,
$dy = -dx$
$x = a \Leftrightarrow y = b-a$
$x = b \Leftrightarrow y = 0$

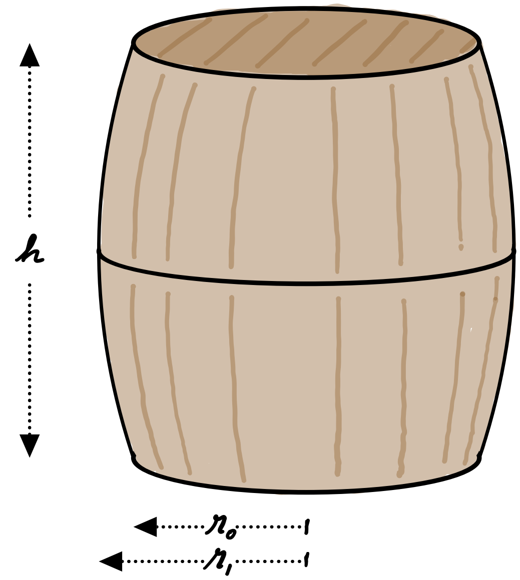
På samme måte kan vi regne ut at $w_1 = \frac{2}{3}(b-a)$ og at $w_2 = \frac{b-a}{6} = w_0$. Dette er

- **Simpsons regel**: $n=2$, $\{x_0, x_1, x_2\} = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$, $w_0 = w_2 = \frac{b-a}{6}$, $w_1 = \frac{2}{3}(b-a)$.
  $$S[f] = \sum_{i=0} w_i f(x_i) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$



Oppgave til fredag 10. sep.

Bruk Simpsons regel til å finne en formel som tilnærmer volumet av et eikefat.



Grad av nøyaktighet og feilestimat

Def: Vi sier at et kvadratur Q er <u>nøyaktig til grad d</u> hvis $Q[p] = I[p]$ $\forall\, p \in \mathbb{P}_d$ og at det finnes minst ett $p \in \mathbb{P}_{d+1}$ slik at $Q[p] \neq I[p]$.

$\mathbb{P}_d := \{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ er et polynom, } \deg p = d \}$

Merk at både Q og I er lineære funksjonaler:

$$
\begin{aligned}
Q[f + cg] &= \sum_{i=0}^{n} w_i \big(f(x_i) + c\, g(x_i) \big) \\
&= \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + c \sum_{i=0}^{n} w_i g(x_i) \\
&= Q[f] + c\, Q[g].
\end{aligned}
$$

En funksjon som har funksjoner som argument kalles gjerne en <u>funksjonal</u>.

Definisjonen over kan derfor forenkles: Hvorfor?

$$Q[x^d] = I[x^d], \quad Q[x^{d+1}] \neq I[x^{d+1}].$$

Dette er en smule missbruk av notasjon. Her mener vi funksjonen p gitt ved $p(x) = x^d$ og ikke tallet x^d. For å være helt korrekt skulle man skrevet $Q[x \mapsto x^d]$. Det kommer vi ikke til å gjöre.

Sörg for at du forstår at midtpunktsregelen og trapesregelen er begge nöyaktige til grad 1. Simpsons regel er nöyaktig til grad 3 fordi

$$
\begin{aligned}
S[x^3] &= \frac{b-a}{6}\left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right) \\
&= \quad \text{regn ut!} \\
&= \frac{b^4 - a^4}{4} = \int_a^b x^3\,dx,
\end{aligned}
$$

og, f. eks.,

$$
\begin{aligned}
S[x^4](0,1) &= \frac{1}{6}\left(0^4 + 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + 1^4\right) \\
&= \frac{5}{24} \\
&\neq \frac{1}{5} = \int_0^1 x^4\,dx.
\end{aligned}
$$

Mer generelt: Et polynominterpolasjonskvadratur

$$Q_n[f] = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i), \quad w_i = \int_a^b \prod_{k=0}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}\,dx,$$

er nöyaktig til grad minst n. Hvorfor?

Ved hjelp av Teoremet for feilestimat av interpolasjonspolynom fra uke 35, kan vi nå gi et estimat på feilen $I[f] - Q[f]$.

Teorem La Q være et kvadratur som er nöyaktig til grad n. Hvis $f \in C^{n+1}(a,b)$, så er

$$|I[f] - Q[f]| \leq \frac{M}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \, dx$$

der $M := \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$.

Bevis: Se notatene felles med 4N.

For trapesregelen $T[f] = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$ og Simpsons regel $S[f] = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(m) + f(b))$ har vi de skarpere resultatene

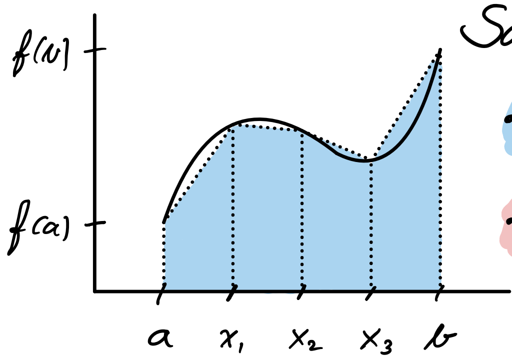
(*)
- $\exists \xi \in (a,b)$ slik at $I[f] - T[f] = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$.
- $\exists \xi \in (a,b)$ slik at $I[f] - S[f] = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$.

No proof

Sammensatt kvadratur

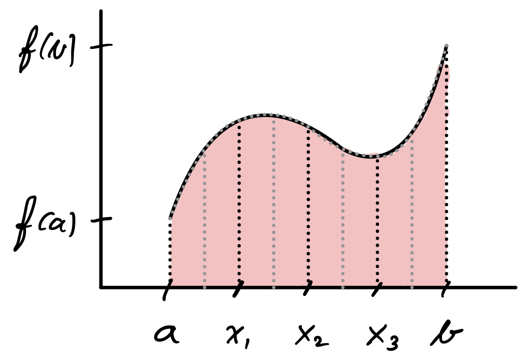
For å gjöre feilen $|I[f] - Q[f]|$ mindre kan man öke graden på interpolasjonspolynomet p_n for deretter la $Q[f] = I[p_n]$. En annen metode er å dele opp integrasjonsintervallet $[a,b]$, og bruke f.eks. $M[f]$, $T[f]$ eller $S[f]$ på hvert delintervall.

Dette kalles et sammensatt kvadratur



Sammensatt

- Trapes
- Simpson



Når $[a,b]$ har delintervaller $[x_{i-1}, x_i]$ definert av nodene $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, så blir den sammensatte trapesregelen

'C' for Composite

$$CT[f] := \sum_{i=1}^{n} T[f](x_{i-1}, x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$$

$h := \frac{b-a}{n}$

$$= h\left(\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(x_n)\right).$$

Sammensatt Simpsons regel

$$CS[f] := \sum_{i=1}^{n} S[f](x_{i-1}, x_i)$$

$m_i := \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\left(f(x_{i-1}) + 4f(m_i) + f(x_i)\right)$$

$$= \frac{h}{6}\Big(f(x_0) + 4f(m_1) + 2f(x_1) + 4f(m_2) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + 4f(m_n) + f(x_n)\Big).$$

Feilestimat for sammensatt kvadratur

Når antall delintervaller i det sammensatte kvadraturet er n, sier vi at steglengden er $h := \frac{b-a}{n}$.

Teorem (Feilestimat for sammensatt trapes)
La $f \in C^2(a,b)$ og la $M_2 := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Da er

$$|I[f] - CT[f]| \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2.$$

Bevis: Fra (*) på s. 6 har vi en ξ_i i hvert delintervall slik at

$$I[f](x_{i-1}, x_i) - T[f](x_{i-1}, x_i) = \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{12} f''(\xi_i).$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
|I[f] - CT[f]| &= \left|\sum_{i=1}^{n} I[f](x_{i-1},x_i) - T[f](x_{i-1},x_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i)\right| \\
&\leq \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} |f''(\xi_i)| \\
&\leq \frac{h^3}{12} n M_2 \\
&= \frac{b-a}{12} M_2 h^2.
\end{aligned}$$

trekant-ulikheten: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

$|f''(\xi_i)| \leq M_2 \ \forall i$

$h^3 = h \cdot h^2 = \frac{b-a}{n} h^2$

Ⅱ

Dette teoremet er nyttig og anvendelig. Merk at feilen er på formen Ch^2 der konstanten C er uavhengig av antall noder n.
Vi kan fastslå at feilen går mot 0 når $n \to \infty$, og eksponenten 2 forteller oss at en dobling av antall noder vil redusere feilen til en firedel: Kvadraturet CT er av orden 2.

'Big Oh'-notasjon:

$$e(h) = \mathcal{O}(h^2) \quad \text{når } h \to 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists C > 0, h_0 > 0 \quad \text{s.a.} \quad \frac{|e(h)|}{h^2} \leq C \quad \forall\, 0 < h \leq h_0.$$

Teorem (Feilestimat for sammensatt Simpson)
La $f \in C^4(a,b)$ og la $M_4 := \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$. Da er

$$|I[f] - CS[f]| \leq \frac{b-a}{2800} M_4 h^4.$$

Bevis: Tilsvarende som for trapes. $\blacksquare$