Feilestimat

Ofte kan datapunkene $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ vare gitt av en underliggende funksjon $f:[a,b] \to \mathbb{R}$.

Dvs. $y_i = f(x_i)$. Hvis p_n er interpolasjonspolynomet til punktene, hva kan man si om feilen

$$e_n(x) := f(x) - p_n(x) \; ?$$

'e' for error

Åpenbart er $e_n(x_i) = 0$, men hva med x-verdier mellom nodene? Vi må ha noe informasjon om f, f.eks. om hvor glatt den er.

$$C^k[a,b] := \left\{ f:[a,b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ er } k \text{ ganger deriverbar} \\ i\ (a,b) \text{ og } f^{(k)} \text{ er kontinuerlig} \end{array} \right\}$$

Intuitivt kan man tro at feilen blir liten hvis f er glatt og nodene står tett. Dette bekreftes av følgende Teorem.

Teorem (Interpolasjonsfeil) La p_n interpolere en funksjon $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ i $n+1$ forskjellige noder $x_i \in [a,b]$ og la $x \in [a,b]$. Hvis $f \in C^{n+1}[a,b]$ så finnes en $\xi \in (a,b)$ s.a.

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

ξ gresk 'xi'. $k! := \prod_{i=1}^{k} i$, 'k fakultet'.

Merk at ξ avhenger av x og er ukjent. Derimot har vi alltid at

$$|e_n(x)| \leq \frac{M_n}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|, \quad M_n := \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

M finnes fordi vi har antatt at den $(n+1)$'te-deriverte av f er kontinuerlig på det lukkede og begrensede intervallet $[a,b]$.

Hvis det er lik avstand mellom alle nodene, $x_i = a + ih$, $h := \frac{b-a}{n}$, så kan det vises at $\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leq \frac{h^{n+1}}{4} n!$. Dette gir i såfall estimatet

$$|e_n(x)| \leq \frac{M_n}{4(n+1)} h^{n+1} \quad \text{når } x_{i+1} - x_i = h \ \forall i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Slike feilestimat gir oss muligheten til å løse følgende type problemer.

<u>Ex</u>: Finn et polynom p slik at $p(x)$ er nærmere $\sin(x)$ enn 10^{-3} for alle $x \in [0, \pi]$.

<u>Løsning</u>: Vi bruker jevnt distribuerte noder $x_i := ih$, $h := \frac{\pi}{n}$, $i = 0, \dots, n$, slik at vi kan anvende estimatet (1). La p_n være interpolasjonspolynomet til punktene $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ der $y_i := \sin(x_i)$.

Sinus kan deriveres i det uendelige ($\sin \in C^\infty[0,\pi]$) og $M_n := \max_{\xi \in [0,\pi]} |\sin^{(n+1)}(\xi)| = 1$ for alle n. Vi finner en stor nok n slik at

$$10^{-3} \geq \frac{M_n}{4(n+1)} h^{n+1} = \frac{1}{4(n+1)} \cdot \left(\frac{\pi}{n}\right)^{n+1}.$$

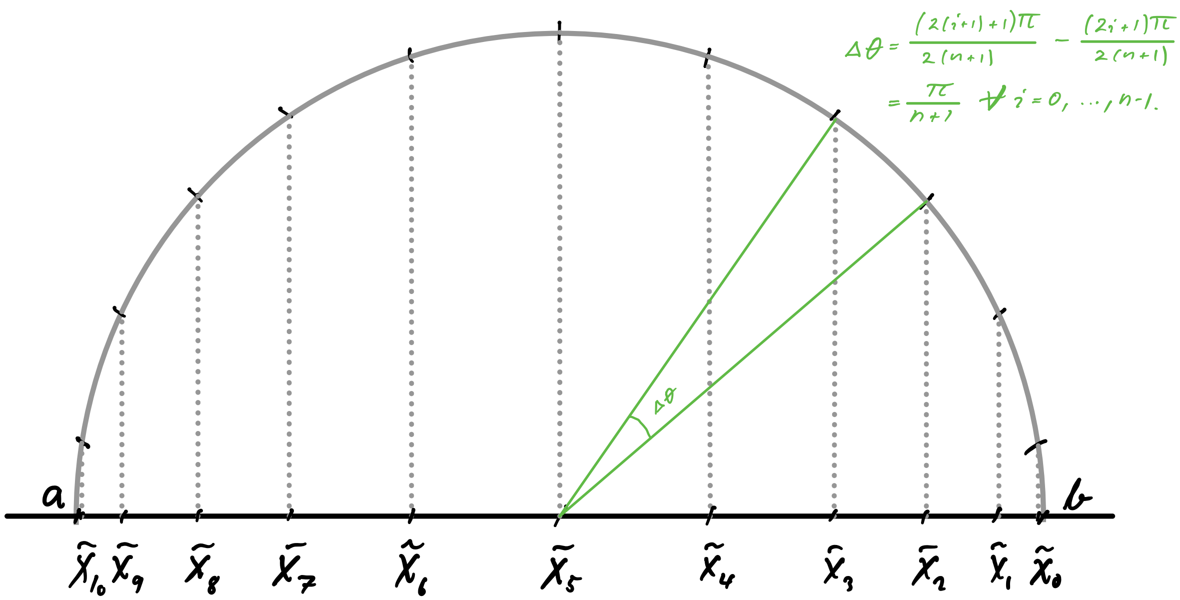
Ingen vits i å forsøke å løse denne ulikheten analytisk. Med litt prøving og feiling finner vi at $n = 6$ holder. Dvs. ved (1) så er, $\forall x \in [0, \pi]$,

$$|\sin(x) - p_6(x)| = |e_6(x)| \leq \frac{M_6}{4 \cdot 7} \left(\frac{\pi}{6}\right)^7 \leq 10^{-3}.$$

Chebyshev-noder Hvordan kan feilen reduseres for en gitt f og et gitt antall noder $n+1$?
Eneste mulighet er å fordele nodene x_i over intervallet $[a,b]$ slik at maksimum av $\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|$ blir minst mulig.
Løsningen når intervallet er $[a,b]=[-1,1]$:

Chebyshev-noder $\tilde{x}_i := \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)$, $i=0,\dots n$.

Vi merker oss at for $i=0$ så er $\tilde{x}_0=\cos\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\approx 1$
og for $i=n$ så er $\tilde{x}_n=\cos\left(\frac{2n+1}{2n+2}\pi\right)\approx -1$.



Det kan vises at

$$\max_{x\in[-1,1]}\prod_{i=0}^{n}|x-\tilde{x}_i| = \frac{1}{2^n}$$

og at dette tallet er mindre eller lik $\max_{x\in[-1,1]}\prod_{i=0}^{n}|x-\hat{x}_i|$ for alle andre samlinger av noder $\hat{x}_0,\dots,\hat{x}_n\in[-1,1]$.

Chebyshev-nodene $\tilde{x}_i \in [-1,1]$ kan flyttes til et vilkårlig intervall $[a,b]$ med lineærtransformasjonen

$$x_i := \frac{b-a}{2}\tilde{x}_i + \frac{b-a}{2}. \qquad (1)$$

<u>Teorem</u> (Interpolasjon med Cheb. noder)

La p_n være interpolasjonspolynomet til $f \in C^{n+1}[a,b]$ i Chebyshev-nodene (1). Da er

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_n}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}},$$

der $M_n := \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.