TMA4135 Matematikk 4D

Forelesningsnotater

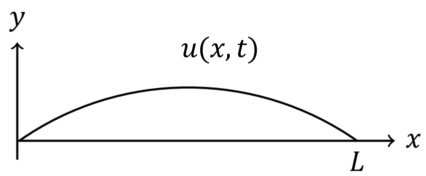
Partielle differensialligninger

Disse forelesningsnotatene er ikke noen erstatning for læreboken, for den er en murstein, altså tar den flere tiår, en haug med slaver, samt et stort forlag, å skrive. Løsningsforslag til oppgavene underveis kommer bakerst. Satser på å få opp presisjonsnivået i notatene etterhvert. Feil sniker seg inn - finner du noen, send gjerne epost til morten.nome@gmail.com.

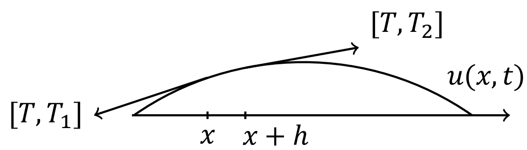
Bølgeligningen

Utledning

Vi tenker at vi har en vibrerende streng som er spent opp i $x = 0$ og $x = L$. La $u(x,t)$ være en funksjon som for hvert tidspunkt t og hvert punkt x beskriver utslaget fra likevektslinjen, som ligger langs x-aksen. Strengen har konstant massetetthet $\rho\ [kg/m]$.



Vi tar en nærmere titt på strekkreftene på et lite stykke av strengen. Vi antar at tyngdekraften er neglisjerbar, og at strengen er helt elastisk, slik at strengestrekket, som virker parallelt med strengen, er eneste kraft. Vi antar at hvert punkt på strengen kun beveger seg loddrett, og at den horisontale komponenten av strengestrekket er konstant lik T.



Vi setter opp Newtons andre lov for den lille biten fra x til $x + h$. Massen til en bit med lengde h er $h\rho$, og akselerasjonen til strengen i punktet x er $u_{tt}(x,t)$. Netto kraft på biten er gitt ved $T_2 + T_1$, slik at

$$h\rho u_{tt}(x,t) = T_2 + T_1,$$

eller

$$\frac{\rho}{T} u_{tt}(x,t) = \frac{T_2/T + T_1/T}{h} = \frac{u_x(x+h,t) - u_x(x,t)}{h},$$

siden stigningstallet til tangenten til strengen er gitt ved u_x. Lar vi nå $h \to 0$, får vi bølgeligningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_x(x,t),$$

der $c^2 = \frac{T}{\rho}$.

Oppstilling av problem

Det er ikke nok med en differensialligning som beskriver strengens bevegelse. Vi må også ha informasjon om hvordan bevegelsen starter, og hvor strengen er spent opp. Et fullstendig oppstilt problem er

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_x(x,t), \tag{1}$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{2}$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x). \tag{3}$$

Selve differensialligningen (1) forteller oss hva slags fysiske lover som skal tilfredsstilles, eller hva slags oppførsel vi kan forvente av løsningen, for eksempel at det er en vibrerende streng det er snakk om. Randkravene (2) forteller oss at strengen er spent opp i $x = 0$ og $x = L$, slik at løsningen står helt i ro der. Initialkravene (3) forteller oss noen om hvordan bevegelsen settes i gang; f angir strengens posisjon ved $t = 0$, mens g angir strengens fart ved $t = 0$. Når man spiller en tone på en gitar ved å dra i strengen og slippe den, slik man vanligvis gjør, er $g = 0$.

Løsning ved separasjon av variable

Et stort geni har engang tenkt at løsningen på bølgeligningen kan skrives

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

Han hadde rett. Det blir meget pent. Innsetting i (1) gir

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t).$$

Vi deler på $c^2 F(x)G(t)$ og får

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}.$$

Siden x og t skal kunne varieres uavhengig av hverandre, må vi ha at

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = -k \quad \text{der } k > 0,$$

altså at

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

og

$$G''(t) + kc^2 G(t) = 0.$$

Vi skal først løse ligningen for F. Den karakteristiske ligningen blir $z^2 + k = 0$, som gir $z = \pm i\sqrt{k}$, slik at

$$F(x) = A\cos\sqrt{k}x + B\sin\sqrt{k}x.$$

Vi kan nå bruke randkravene (2) til å bestemme A og k. Krever vi

$$u(x,0) = F(0)G(t) = AG(t) = 0,$$

kan dette oppnås ved å sette $A = 0$. Krever vi

$$u(x,L) = F(L)G(t) = B\sin(\sqrt{k}L)G(t) = 0,$$

kan dette oppnås ved å sette $B = 0$, som er uinteressant siden da blir $u(x,t) = 0$, eller ved å kreve

$$\sqrt{k}L = n\pi.$$

slik at

$$k = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Nå ser vi hvorfor $k > 0$. Dersom $k < 0$, blir $F(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}$, og da gir randkravene $F(x) = 0$. Dersom $k = 0$, blir $F(x) = Ax + B$ og da gir randkravene også $F(x) = 0$. Vi ser at $n > 0$, for dersom $n < 0$ byttes bare fortegnet på B, som ennå er ubestemt. Ved å ta en titt på det endelige løsningen av problemet, ser man at B er overflødig, og vi velger $B = 1$.

Ligningene

$$G''(t) + c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0.$$

løses av

$$G_n(t) = A_n\cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n\sin c\frac{n\pi}{L}t,$$

så de generelle løsningene til bølgeligningen med randkrav (2) blir

$$u_n(x,t) = F(x)G_n(t) = \left(A_n\cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n\sin c\frac{n\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Vi har ennå ikke tatt stilling til initialkravene (3). Det kan vi klare ved å skrive

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L}t \right) \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Dersom vi nå krever

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x,$$

ser vi at summen til høyre bør være fourierrekken til den odde utvidelsen til f, og følgelig bør

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

På samme vis, dersom

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c\frac{n\pi}{L} \sin\frac{n\pi}{L}x,$$

bør summen til høyre være fourierekken til den odde utvidelsen til g, og følgelig må

$$B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

For å oppsummere:

Bølgeligningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_x(x,t),$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

løses av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L}t \right) \sin\frac{n\pi}{L}x,$$

der

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad \text{og} \quad B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

Varmeligningen

'Utledning'

Nå skal vi istedet tenke oss en isolert stang der temperaturen er gitt av $u(x,t)$. Varme kan slippe ut eller tilføres gjennom endepunktene, men ingen andre steder. Hvis vi ser på en infinitesimal bit av stangen, kan man si at opplagret varmeenergi i biten er

$$K\,h\,u(x,t),$$

der K er en konstant relatert til varmekapasiteten til materialet stangen er laget av, og h er lengden av biten. Varmeenergi strømmer fra varme til kalde områder, og varmestrømmen er proporsjonal med temperaturgradienten $u_x(x,t)$. Netto endring i varmeenergi

$$K\,h\,u_t(x,t),$$

i den lille biten er proporsjonal med differansen mellom det som strømmer ut i den ene enden og inn i den andre, altså

$$u_t(x,t) = \frac{c^2}{h}\left(u_x(x+h,t) - u_x(x,t)\right),$$

der c^2 er en ny konstant relatert til varmekapasiteten og varmeledningsevnen til materialet. Lar vi $h \to 0$, får vi varmeligningen

$$u_t = c^2 u_{xx}.$$

Løsning på begrenset intervall - separasjon av variable

Vi skal løse varmeligningen

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

på stang med lengde L. Randkravene

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{4}$$

sier at temperaturen holdes konstant lik 0 i endepunktene, og initialkravet

$$u(x,0) = f(x) \tag{5}$$

sier at temperaturfordelingen er gitt ved $f(x)$ når tiden begynner å gå.

Vi prøver separasjon av variable

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

På samme vis som for bølgeligningen, får vi

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

og

$$G'(t) + kc^2G(t) = 0.$$

Å finne F og k blir eksakt repetisjon av argumentet for bølgeligningen, mens

$$G_n(t) = A_n e^{-c\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

slik at de generelle løsningene til bølgeligningen med randkrav $u(0,t) = u(L,t) = 0$ blir

$$u_n(x,t) = F(x)G_n(t) = A_n e^{-c\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Likeledes kan initialkravet $u(x,0) = f(x)$ inkorporeres ved å legge sammen alle løsninger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{L}x,$$

sette $t = 0$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x,$$

og observere at vi får dette til dersom A_n er fourierkoeffisientene til den odde utvidelsen til f

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

Løsning på hele x-aksen - fouriertransformasjon

Vi skal nå løse varmeligningen

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

på en uendelig lang stang. Randkravene skal være

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0, \tag{6}$$

mens initialkravet er som før

$$u(x,0) = f(x), \tag{7}$$

der vi antar

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0. \tag{8}$$

Vi skal løse dette problemet ved å fouriertransformere varmeligningen med hensyn på x. Siden $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$, satser vi på at det går bra, og vi får

$$\mathcal{F}(u_t) = c^2 \mathcal{F}\left(u_{xx}\right).$$

Vi tar en kikk på disse to. Hvis vi antar at u er kontinuerlig deriverbar i t, og fouriertransformen er med hensyn på x, kan vi skrive

$$\mathcal{F}(u_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)e^{-iwx}\,dx = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx}\,dx = \hat{u}_t(w,t),$$

og

$$\mathcal{F}(u_{xx}) = -w^2\mathcal{F}(u) = -w^2\hat{u}(w,t),$$

slik at

$$\hat{u}_t = -c^2w^2\hat{u}.$$

Vi later som om dette er en ordinær differensialligning for $\hat{u}$, og får

$$\hat{u}(w,t) = A(w)e^{-c^2w^2t}.$$

Fouriertransformerer vi initialkavet, ser vi at

$$A(w) = \hat{u}(w,0) = \mathcal{F}\left(u(x,0)\right) = \mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(x), \tag{9}$$

og da er det egentlig bare å inversfouriertransformere, og så har vi løsningen

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx}\, dw.$$

Vel og bra, men vi kan komme oss et knepp til. Husk at

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{2\pi}\, \hat{f}\, \hat{g}\right),$$

og observer at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx}\, dw = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}\, e^{-c^2 w^2 t}\right).$$

Med andre ord, hvis vi kunne inverstransformere $e^{-c^2 w^2 t}$ hadde det vært bra. Husk fra tabellen at

$$\mathcal{F}\left(e^{ax^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{-w^2}{4a}}.$$

Setter vi

$$a = \frac{1}{4c^2 t},$$

og ganger og deler litt med konstanter, kan vi si at

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{c\sqrt{2t}} e^{\frac{x^2}{4c^2 t}}\right) = e^{-c^2 w^2 t},$$

som gir

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\, e^{-c^2 w^2 t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f * \frac{1}{c\sqrt{2t}} e^{\frac{x^2}{4c^2 t}}\right)$$

$$= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}}\, dv.$$

Laplace' ligning

'Utledning'

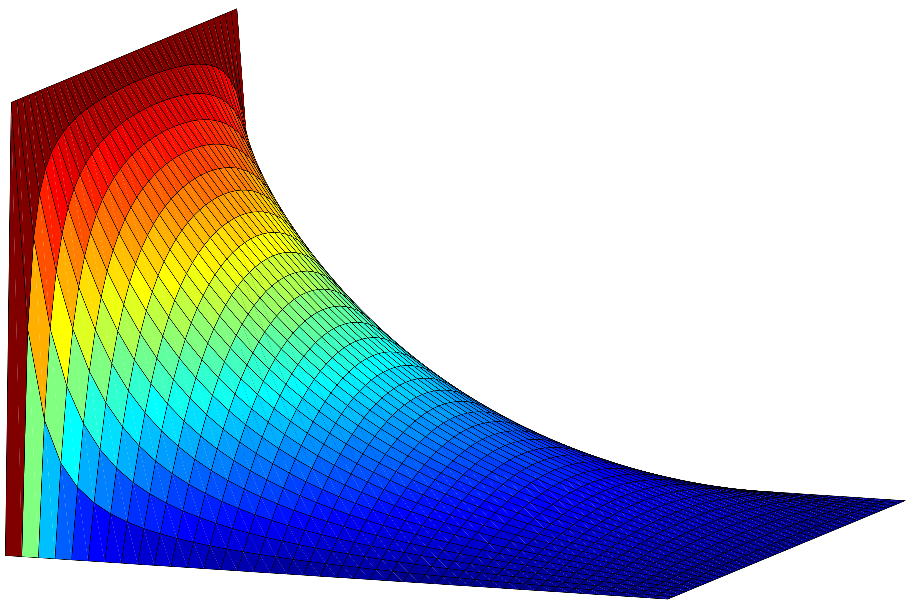
For å forstå hvor Laplace' ligning kommer fra, må man forstå varmeligningen i to eller flere romlige dimensjoner

$$u_t = c^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right).$$

Du skal være ganske sterk i de hardeste delene av matte 2 for å skjønne utledningen, så den dropper vi. Det fysiske bildet du kan ha, er en tynn varmeisolert plate der varmeenergi kan forsvinne ut eller inn gjennom sidekantene. Løsningen til varmeligningen vil da gi temperaturen $u(x, y, t)$ i platen gitt fornuftige rand- og initialkrav. Vi skal ikke løse varmeligningen i to romlige dimensjoner, men derimot betrakte spesialtilfellet der $t \to \infty$, slik at varmestrømmen er konstant, eller steady-state flow som vi sier på norsk. Dersom varmestrømmen er konstant, er $u_t(x, y, t) = 0$, slik at varmeligningen blir

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Dette kalles Laplace' ligning, og den kan vi løse med teknikker vi har lært i kurset. Her er en figur som beskriver en typisk situasjon.



Dette er temperaturen i en tynn plate der temperaturen holdes konstant lik null på tre sider, og konstant lik fem eller en eller noe på den siste siden.

Løsning på begrenset intervall - separasjon av variable

Vi setter opp problemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

på rektangelet $[0, a] \times [0, b]$ med randkrav

$$u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \qquad \text{og} \qquad u(x, b) = f(x).$$

Vi separerer i vei

$$u(x, y) = F(x)G(y).$$

På samme vis som for bølgeligningen og varmeligningen, får vi

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

og

$$G''(y) - kG(y) = 0.$$

Å finne F og k blir eksakt repetisjon av argumentet for bølgeligningen, mens

$$G_n(y) = A_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{\frac{n\pi}{a}y}$$

slik at de generelle løsningene som tilfredsstiller $u(0, y) = u(b, y) = 0$ blir

$$u_n(x, y) = F(x)G_n(y) = \left(A_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{\frac{n\pi}{a}y}\right) \sin \frac{n\pi}{a} x.$$

Krever vi $u(x, 0) = 0$, får vi

$$A_n = -B_n,$$

slik at

$$u_n(x, y) = A_n \left(e^{-\frac{n\pi}{a}y} - e^{\frac{n\pi}{a}y}\right) \sin \frac{n\pi}{a} x = A_n \sinh \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

og krever vi $u(x, b) = f(x)$, får vi det til ved å legge sammen alle løsninger

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

og kreve

$$f(x) = u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

slik at

$$A_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

Løsning i halvplanet - fouriertransform

Vi skal se på Laplace' ligning

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

i halvplanet. Randkrav skal være

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,y) = \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$$

og

$$u(x,0) = f(x),$$

der

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Siden $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,y) = 0$ satser vi på at u er absolutt integrerbar i x, slik at vi kan fouriertransformere med hensyn på x. Da får vi

$$\mathcal{F}(u_{xx}) + \mathcal{F}(u_{yy}) = \mathcal{F}(0)$$

eller

$$-w^2\hat{u}(w,y) + \hat{u}_{yy}(w,y) = 0.$$

Akkurat som med varmeligningen, later vi som om dette er en ordinær differensialligning i y, og får

$$\hat{u}(w,y) = A(w)e^{-|w|y} + B(w)e^{|w[y}.$$

Nå må vi fouriertransformere randkravet $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$, og da får vi

$$\lim_{y\to\infty} \hat{u}(w,y) = 0.$$

Bruker vi dette, ser vi at $B(w) = 0$, og følgelig er

$$\hat{u}(w,y) = A(w)e^{-|w|y}.$$

Transformerer vi $u(x,0) = f(x)$, får vi

$$\hat{u}(w,0) = \hat{f}(w),$$

og bruker vi denne, får vi

$$\hat{u}(w,y) = \hat{f}(w)e^{-|w|y}.$$

Nå kan vi inverstransformere og få

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-|w|y}e^{iwx}\,dw = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(w)e^{-|w|y}).$$

Nå bruker vi samme trikset som for varmeligningen. Siden dette er inversfouriertransformen til produktet mellom $\hat{f}(w)$ og $e^{-|w|y}$, og

$$\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}\right) = e^{-|w|y},$$

ser vi at

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\frac{y}{(x-v)^2+y^2}\,dv.$$