TMA4135 Matematikk 4D

Forelesningsnotater

Numeriske metoder for differensialligninger

Disse forelesningsnotatene er ikke noen erstatning for læreboken, for den er en murstein, altså tar den flere tiår, en haug med slaver, samt et stort forlag, å skrive. Feil sniker seg inn - finner du noen, send gjerne epost til morten.nome@gmail.com.

Litt numerisk derivasjon

La f være en analytisk funksjon. Vi taylorutvikler f om punktet x

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \dots$$

Vi kan tilnærme f' ved å skrive

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \dots$$

Merk at uttykket på venstre side er sekanten til f mellom punktene x og $x+h$. Feilen i tilnærmingen er gitt ved

$$\frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \dots$$

En annen variant er å skrive

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \dots$$

og sette opp tilnærmingen

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \frac{f^5(x)}{5!}h^4 + \dots$$

Feilen i denne tilnærmingen er

$$\frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \frac{f^5(x)}{5!}h^4 + \dots$$

Hvis h er liten, er det rimelig å anta denne feilen er mindre enn for den første tilnærmingen, siden $h^2 << h$. Tilnærmingen

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

kalles en endelig differanse, jf. Newtons interpolasjonsmetode. Vi kan også finne tilnæminger til høyere ordens deriverte, for eksempel

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{f''''(x)}{12}h^2 + \dots$$

Metoder for ordinære differensialligninger

Vi skal holde oss til differensialligninger av første orden

$$y' = f(x,y),$$

med initialkrav

$$y(0) = a.$$

Vi gitrer opp intervallet vi skal løse ligningen på med gitterfinhet h, slik at punktene er gitt ved $x_i = ih$. Tilnærmingen til $y(x_i)$ kaller vi y_i. Metodene vi skal behandle, baserer seg på to teknikker - tilnærming av y' ved endelige differanser, eller integrasjon av interpolasjonspolynom. Mange metoder kan konstrueres på begge måter.

Eulers metoder

Vi begynner med Eulers metode, som du lærte i matte 1. Den mest åpenbare måten å konstruere denne metoden på, er å skrive

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$$

og så bytte ut y' med denne endelige differansen, slik at

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx f(x,y(x)),$$

eller

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x,y(x)),$$

Inspirert av denne ligningen, setter vi opp Eulers eksplisitte metode

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Dette kalles en enstegsmetode, for du trenger kun y_i for å beregne y_{i+1}. Metoden kalles også eksplisitt, for dersom man har beregnet y_i, er det bare å regne ut y_{i+1} ved å sette x_i og y_i inn i formelen. Eulers implisitte metode er

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Dersom denne ligningen ikke lar seg løse analytisk for y_{i+1}, må man bruke en numerisk ligningsløser i hvert steg. Eksplisitte og implisitte metoder har litt forskjellige egenskaper. Noen differensialligninger lar seg kun tilnærme med implisitte metoder.

Det finnes en miks av eksplisitt og implisitt Euler som kalles trapesmetoden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right).$$

Dette er en implisitt metode. En eksplisitt fetter av denne heter forbedret Euler, og går som

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)\right).$$

der

$$y_{i+1}^* = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Du kan tenke på y_{i+1}^* som en slags tilnærming til y_{i+1} i f i trapesmetoden.

Utledning ved hjelp av numerisk integrasjon

Man kan også utlede Eulers metoder ved å skrive $f(x, y(x)) \approx f(x_i, y_i)$, integrere differensialligningen, og få

$$y_{i+1} - y_i \approx y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx.$$

Nå kan man bruke forskjellige numeriske metoder for å approksimere integralet til høyre. Velger man

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx. \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i)\,dx = hf(x_i, y_i),$$

får man eksplisitt Euler. Velger man

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx. \approx hf(x_{i+1}, y_{i+1}),$$

får man Euler implisitte metod. Velger man

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx. \approx \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right).$$

får man trapesmetoden, og velger man

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx. \approx \frac{h}{2} \left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*) \right)$$

der $y_{i+1}^* = y_i + hf(x_i, y_i)$, får man forbedret Euler. Her kommer det en figur.

Runge-Kuttas metode

Runge-Kutta er egentlig en hel klasse av metoder, der f. eks. Eulers metoder bare er spesialtilfeller. Vi skal lære oss en bestemt av disse Runge-Kutta-metodene, nemlig Runge-Kutta-metoden. Den går som følger. Beregn først

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3). \end{aligned}$$

Så beregner du

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,.$$

De forskjellige k_i er tilnærminger til løsningens stigningstall, k_1 og k_4 til stigningstallene i x_i og x_{1+i} henholdsvis, mens k_2 og k_3 er tilnærminger til stigningstallene til sekantene mellom i x_i, $x_i + h/2$ og $x_i + h/2$ x_{i+1}, henholdsvis. Figur kommer.

Man kan utlede Runge-Kuttas metode ved å integrere f med Simpsons metode, jf. avsnittet over.

Et par metoder for varmeligningen

Vi skal lage en numerisk metode for varmeligningen

$$u_t = u_{xx}$$

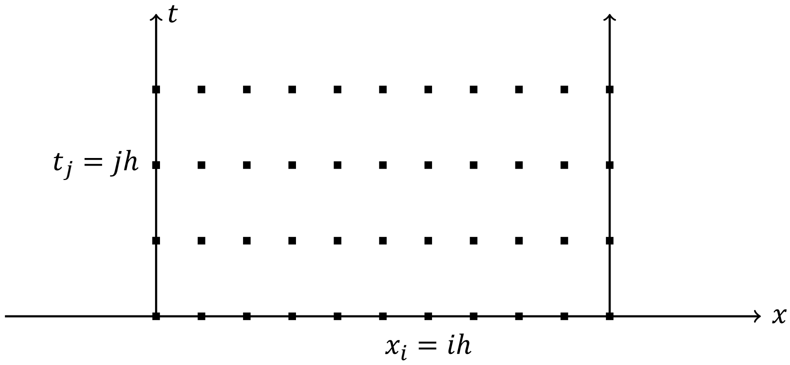
med randkrav

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

og

$$u(x, 0) = f(x).$$

Vi gitrer opp intervallet $[0, 1]$ på x-aksen med gitteravstanden h, og den positive t-aksen med gitterav-standen k, kalt tidssteget.



Vi setter opp en tilnærming for $u_{xx}(x,t)$ (se øverst i denne filen)

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2},$$

og en for u_t

$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k}.$$

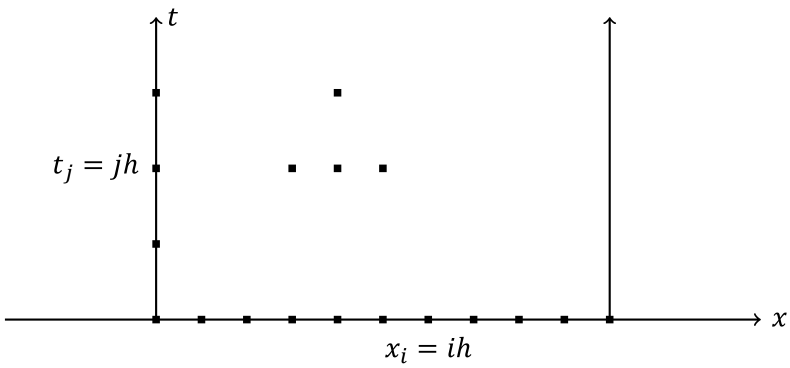
Hvis vi kaller den tilnærmede verdien til u i punktet (x_i, t_j) for u_{ij}, får vi

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k}.$$

La oss anta at alle verdier u_{ij} er beregnet for et nivå j. Ligningen over kan brukes til å beregne

$$u_{i,j+1} = u_{ij} + \frac{k}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right).$$

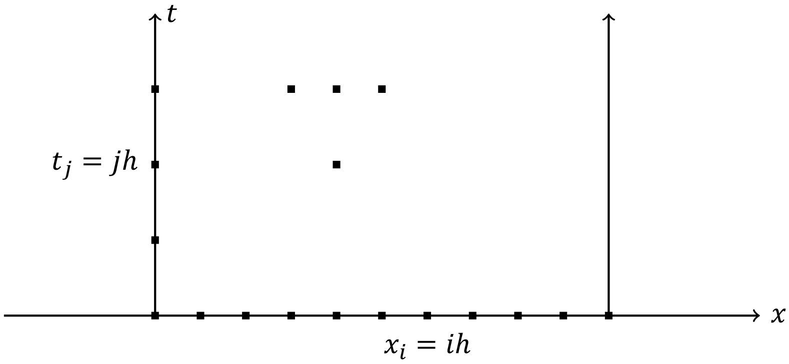
Vi pleier å tegne opp noe som kalles stensilen.



Dette er en figur som illustrerer hvilke gitterpunkter som er involvert i ligningen man bruker for å beregne nye approksimasjoner. Problemet med det eksplisitte skjemaet er at det går til h... med mindre $k/h^2 < 1/2$, og dette gjør at du må ha veldig tett mellom punktene t-aksen. Vi skal ta for oss to måter å bøte på dette på. Den første er å kjøre implisitt istedet for eksplisitt ved å flytte differansen for u_{xx} et hakk opp på t-aksen, slik at vi får

$$\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k}.$$

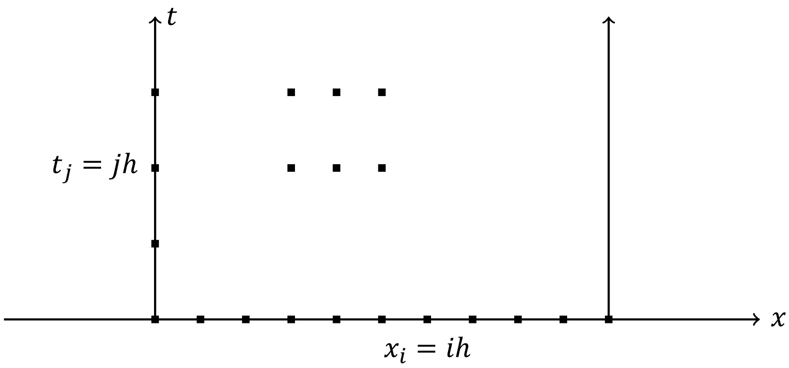
Merk at nå er det tre ukjente i ligningen, så for hvert tidssteg må vi løse et lineært ligningssystem. Stensilen er



En siste metode er å tilnærme u_{xx} ved gjennomsnittet av differansen på j og $j+1$- nivået. Ligningen blir

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2h^2} + \frac{u_{i+1,j+} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{2h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k},$$

og metoden kalles Crank-Nicolsons metode. Stensilen er



Også her blir det et lineært ligningssystem å løse på hvert tidssteg. Matrisene kommer etterhvert.