TMA4135 Matematikk 4D

Forelesningsnotater

Numeriske metoder for differensialligninger

Disse forelesningsnotatene er ikke noen erstatning for læreboken, for den er en murstein, altså tar den flere tiår, en haug med slaver, samt et stort forlag, å skrive. Feil sniker seg inn - finner du noen, send gjerne epost til morten.nome@gmail.com.

Litt numerisk derivasjon

La f være en analytisk funksjon. Vi taylorutvikler f om punktet x

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \dots$$

Vi kan tilnærme f' ved å skrive

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \dots$$

Merk at uttykket på venstre side er sekanten til f mellom punktene x og $x+h$. Feilen i tilnærmingen er gitt ved

$$\frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \dots$$

En annen variant er å skrive

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \dots$$

og sette opp tilnærmingen

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \frac{f^5(x)}{5!}h^4 + \dots$$

Feilen i denne tilnærmingen er

$$\frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \frac{f^5(x)}{5!}h^4 + \dots$$

Hvis h er liten, er det rimelig å anta denne feilen er mindre enn for den første tilnærmingen, siden $h^2 << h$. Tilnærmingen

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

kalles en endelig differanse, jf. Newtons interpolasjonsmetode. Vi kan også finne tilnæminger til høyere ordens deriverte, for eksempel

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)+\frac{f''''(x)}{12}h^2+\dots$$

Metoder for ordinære differensialligninger

Vi skal holde oss til differensialligninger av første orden

$$y'=f(x,y),$$

med initialkrav

$$y(0)=a.$$

Vi gitrer opp intervallet vi skal løse ligningen på med gitterfinhet h, slik at punktene er gitt ved $x_i=ih$. Tilnærmingen til $y(x_i)$ kaller vi y_i. Metodene vi skal behandle, baserer seg på to teknikker - tilnærming av y' ved endelige differanser, eller integrasjon av interpolasjonspolynom. Mange metoder kan konstrueres på begge måter.

Eulers metoder

Vi begynner med Eulers metode, som du lærte i matte 1. Den mest åpenbare måten å konstruere denne metoden på, er å skrive

$$y'(x)\approx\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$$

og så bytte ut y' med denne endelige differansen, slik at

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h}\approx f(x,y(x)),$$

eller

$$y(x+h)\approx y(x)+hf(x,y(x)),$$

Inspirert av denne ligningen, setter vi opp Eulers eksplisitte metode

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i).$$

Dette kalles en enstegsmetode, for du trenger kun y_i for å beregne y_{i+1}. Metoden kalles også eksplisitt, for dersom man har beregnet y_i, er det bare å regne ut y_{i+1} ved å sette x_i og y_i inn i formelen. Eulers implisitte metode er

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_{i+1}).$$

Dersom denne ligningen ikke lar seg løse analytisk for y_{i+1}, må man bruke en numerisk ligningsløser i hvert steg. Eksplisitte og implisitte metoder har litt forskjellige egenskaper. Noen differensialligninger lar seg kun tilnærme med implisitte metoder.

Man kan også utlede Eulers eksplisitte metode ved å skrive $f(x, y(x)) \approx f(x_i, y_i)$, integrere differensialligningen, og få

$$y_{i+1} - y_i \approx y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i)\,dx = hf(x_i, y_i).$$

Velger man istedet $f(x, y(x)) \approx f(x_{i+1}, y_{i+1})$ og gjør samme resonnement, får man Eulers implisitte metode.

Runge-Kuttas metode

Runge-Kutta er egentlig en hel klasse av metoder, der f. eks. Eulers metoder bare er spesialtilfeller. Vi skal lære oss en bestemt av disse Runge-Kutta-metodene, nemlig Runge-Kutta-metoden. Den går som følger. Beregn først

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3).
\end{aligned}$$

Så beregner du

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).$$

Man kan utlede Runge-Kuttas metode ved å integrere f med Simpsons metode.

Metoder for systemer av ordinære differensialligninger

Metoder for partielle differensialligninger