

## Forelesningsnotater

## Numerikk

Disse forelesningsnotatene er ikke noen erstatning for læreboken, for den er en murstein, altså tar den flere tiår, en haug med slaver, samt et stort forlag, å skrive. Feil sniker seg inn - finner du noen, send gjerne epost til [morten.nome@gmail.com](mailto:morten.nome@gmail.com).

## Envariable ligningslødere

I anvendelser møter man ligninger som ikke lar seg løse analytisk. Et klassisk eksempel er  $x = \cos x$ .

## Fikspunktiterasjonen

Anta at vi har en ligning på formen

$$r = g(r).$$

Iterasjonen

$$x_{i+1} = g(x_i). \quad (1)$$

vil konvergere mot  $r$  dersom  $r, x_0 \in (a, b)$  og  $g'(x) < 1$  på  $(a, b)$ .

## Newtons metode

Anta at ligningen er på formen

$$f(r) = 0.$$

Prosedyren for Newtons metode er som følger: slå tangenten til funksjonen  $f$  i iterasjonen  $x_i$ . Punktet der tangenten skjærer  $x$ -aksen er den nye iterasjonen  $x_{i+1}$ . Hvis vi setter opp ligningen for tangenten

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i),$$

og sier at iterasjonen  $x_{i+1}$  er de  $x$ -verdien slik at  $y = 0$

$$-f(x_i) = f'(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

blir iterasjonen

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

## Sekantmetoden

Denne ligner på Newton, men vi slår sekanten til  $f$  gjennom iterasjonene  $x_i$  og  $x_{i-1}$ , istedet for tangenten i  $x_i$ . Punktet der sekanten skjærer  $x$ -aksen er den nye iterasjonen  $x_{i+1}$ . Iterasjonen blir

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}.$$

Merk at her må man ha to initialgjetninger  $x_1$  og  $x_0$ , siden man trenger to punkter for å slå en sekant.

## Newtons metode i to dimensjoner

Anta at vi har to funksjoner  $f_1(x, y)$  og  $f_2(x, y)$ . Vi leter etter et punkt  $(a, b)$  slik at både

$$f_1(a, b) = 0$$

og

$$f_2(a, b) = 0.$$

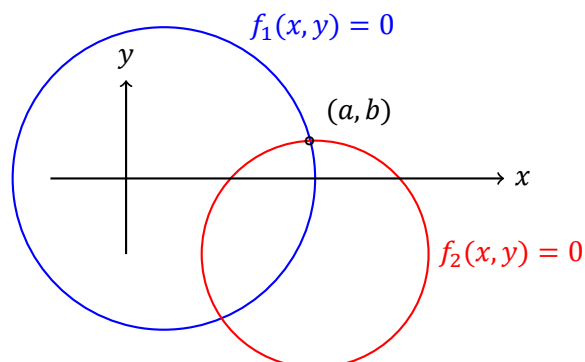
Ligningene

$$f_1(x, y) = 0$$

og

$$f_2(x, y) = 0$$

angir nivåkurver for funksjonene  $f_1$  og  $f_2$ . Punktet  $(a, b)$  må ligge på skjæringspunktet mellom disse.



Anta at du har en iterasjon  $(x_n, y_n)$ . Vi setter opp tangentplanene til  $f_1$  og  $f_2$  i  $(x_n, y_n)$

$$z - f_1(x_n, y_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n)(x - x_n) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n)(y - y_n)$$

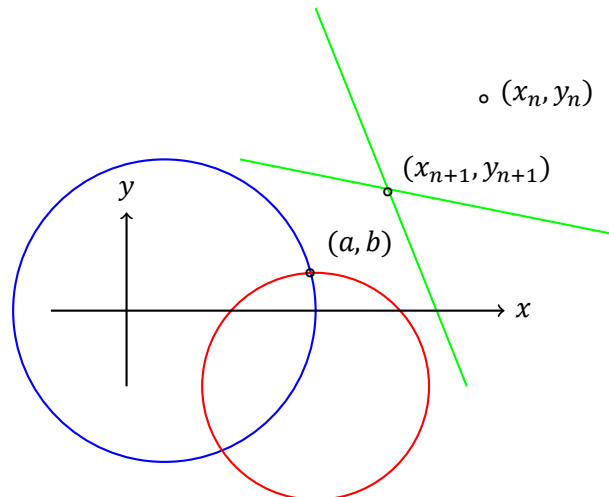
$$z - f_2(x_n, y_n) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n)(x - x_n) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n)(y - y_n).$$

Hvis vi krever at  $z = 0$ , får vi ligninger for der disse tangentlinjene skjærer  $(x, y)$ -planet

$$-f_1(x_n, y_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n)(x - x_n) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n)(y - y_n)$$

$$-f_2(x_n, y_n) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n)(x - x_n) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n)(y - y_n).$$

Iterasjonen  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  defineres som skjæringen mellom disse linjene.



Altså er

$$-f_1(x_n, y_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n)(y_{n+1} - y_n)$$

$$-f_2(x_n, y_n) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n)(y_{n+1} - y_n).$$

et lineært ligningssystem som definerer  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ . Matrisen er

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

og vi skriver

$$-\begin{pmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} - x_n \\ y_{n+1} - y_n \end{pmatrix}.$$

Nå kan vi gange med

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1}$$

fra venstre, legge til  $(x_n, y_n)$  på begge sider, og få Newtons metode for systemer

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{pmatrix}.$$

Jeg gadd ikke skrive ut hva

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1}$$

er, men du kan regne det ut ved å huske fra lineæralgebraen at

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$