

## Forelesningsnotater

## Ligningslødere

Disse forelesningsnotatene er ikke noen erstatning for læreboken, for den er en murstein, altså tar den flere tiår, en haug med slaver, samt et stort forlag, å skrive. Feil sniker seg inn - finner du noen, send gjerne epost til [morten.nome@gmail.com](mailto:morten.nome@gmail.com).

## Ligningslødere for envariable ligninger

I anvendelser møter man ligninger som ikke lar seg løse analytisk. Et klassisk eksempel er  $x = \cos x$ .

## Fikspunktiterasjonen

Anta at vi har en ligning på formen

$$r = g(r).$$

Iterasjonen

$$x_{i+1} = g(x_i). \quad (1)$$

vil konvergere mot  $r$  dersom  $r, x_0 \in (a, b)$  og  $g'(x) < 1$  på  $(a, b)$ .

## Newtons metode

Anta at ligningen er på formen

$$f(r) = 0.$$

Proseduren for Newtons metode er som følger: slå tangenten til funksjonen  $f$  i iterasjonen  $x_i$ . Punktet der tangenten skjærer  $x$ -aksen er den nye iterasjonen  $x_{i+1}$ . Hvis vi setter opp ligningen for tangenten

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i),$$

og sier at iterasjonen  $x_{i+1}$  er de  $x$ -verdien slik at  $y = 0$

$$-f(x_i) = f'(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

blir iterasjonen

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

## Sekantmetoden

Denne ligner på Newton, men vi slår sekanten til  $f$  gjennom iterasjonene  $x_i$  og  $x_{i-1}$ , istedet for tangenten i  $x_i$ . Punktet der sekanten skjærer  $x$ -aksen er den nye iterasjonen  $x_{i+1}$ . Iterasjonen blir

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}.$$

Merk at her må man ha to initialgjetninger  $x_1$  og  $x_0$ , siden man trenger to punkter for å slå en sekant.

## Litt om konvergens

Vi bruker Taylorutvikling for å analysere hvor fort en ligningsløser konvergerer mot løsningen. La oss begynne med fikspunktiterasjonen. Vi Taylorutvikler  $g$  om  $r$ , og får

$$g(x_n) = g(r) + g'(r)(x_n - r) + \frac{g''(r)}{2}(x_n - r)^2 + \frac{g'''(r)}{3!}(x_n - r)^3 + \dots$$

Nå kan vi skrive

$$x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r) = g'(r)(x_n - r) + \frac{g''(r)}{2}(x_n - r)^2 + \frac{g'''(r)}{3!}(x_n - r)^3 + \dots$$

og da har vi en ligning som sier noe om størrelsen på  $x_{n+1} - r$  som en funksjon av  $x_n - r$ , altså hvor mye feilen minker fra iterasjon til iterasjon. For fikspunktiterasjonen ser vi at det blir best konvergens om  $g$  er så flat som mulig. Konvergens kalles for øvrig lineær, siden  $x_{n+1} - r$  er proporsjonal med  $x_n - r$ .

For å analysere Newtons metode

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},$$

må vi se på det som en fikspunktiterasjon der

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Vi beregner

$$g'(x) = 1 - \frac{(f(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = -\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Husk at  $f(r) = 0$ . Dersom  $f'(r) \neq 0$ , får vi

$$g'(r) = -\frac{f(r)f''(r)}{(f'(r))^2} = 0,$$

slik at

$$x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r) = \frac{g''(r)}{2}(x_n - r)^2 + O((x_n - r)^3).$$

Dette kalles kvadratisk konvergens - feilen etter  $n + 1$  iterasjoner er proporsjonal med kvadratet av feilen etter  $n$  iterasjoner. Da konvergerer det fort.

Når det gjelder sekantmetoden, kan det vises at

$$x_{n+1} - r = C(x_n - r)^{1.62},$$

men det er et svineri, du må Taylorutvikle noe ut av det hinsidige. Konvergens kalles superlineær, altså kjappere enn fikspunkt, men treigere enn Newton.

## Ligningsløserne for ligningssystem

Vi skal ta for oss to metoder for å løse ligningssystemer - en fikspunktiterasjon for lineære systemer, og Newtons metode for ikke-lineære systemer.

### Fikspunktiterasjon for lineære ligningssystemer

Vi skriver om ligningssystemet

$$Ax = b \tag{2}$$

til formen

$$x = G(x).$$

Det finnes to åpenbare måter å gjøre dette på. Vi legger til og trekker fra  $x$  i (2), og får

$$(A - I + I)x = b$$

slik at

$$x = b + (I - A)x.$$

Hvis vi nå setter

$$x_{n+1} = b + (I - A)x_n$$

får vi Jacobis iterative metode. En annen variant er å skrive

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

definere

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

og

$$R = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

og så sette opp iterasjonen

$$x_{n+1} = D^{-1}(b - Rx_n).$$

Dette kalles også Jacobis metode.

Det finnes en vri på Jacobis iterasjoner som kalles Gauss-Seidels iterasjon. Den går som følger. Vi skriver opp Jacobis iterasjon som

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Her vil man jo først regne ut  $x_{n+1} = b_1 - (a_{11} - 1)x_n - a_{12}y_n - a_{13}z_n$ . Når man skal regne ut  $y_n$  har man  $x_{n+1}$  til rådighet, så den kan man bruke, og sette  $y_{n+1} = b_2 - a_{21}x_{n+1} - (a_{22} - 1)y_n - a_{23}z_n$ , istedet for  $y_{n+1} = b_2 - a_{21}x_n - (a_{22} - 1)y_n - a_{23}z_n$  som Jacobi gjør. Likeledes kan man sette  $z_{n+1} = b_3 - a_{31}x_{n+1} - a_{32}y_{n+1} - (a_{33} - 1)z_n$ , slik at iterasjonen blir

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Man kan få en magefølelse for hva som trengs for at disse metodene skal konvergere ved å studere Jacobiiterasjonen

$$x_{n+1} = D^{-1}(b - Rx_n).$$

Dersom  $Ax = b$ , vil

$$x = D^{-1}(b - Rx),$$

siden dette bare er en omskriving av  $Ax = b$ . Vi kan trekke iterasjonsligningen fra den eksakte ligningen og få

$$x_{n+1} - x = D^{-1}R(x_n - x).$$

Her ser vi at feilen minker dersom matrisen  $D^{-1}R$  har en 'krympende virkning' på vektorer du ganger inn i den. Vi har

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{pmatrix},$$

og følgelig

$$D^{-1}R = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 0 \end{pmatrix},$$

Hvis matrisen  $D^{-1}R$  skal ha en 'krympende virkning' på vektorer som ganges inn i den, bør komponentene i  $D^{-1}R$  være minst mulig. Vi ser nå at dette skjer dersom diagonalelementene i  $A$  er mye større enn de andre elementene i  $A$ . Jo større forskjell, desto raskere konvergens. Man kan vise at Jacobis iterasjon konvergerer dersom vi har såkalt diagonaldominans, nemlig at

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

for alle rekker i  $A$ .

Newton's metode i to dimensjoner

Anta at vi har to funksjoner  $f_1(x, y)$  og  $f_2(x, y)$ . Vi leter etter et punkt  $(a, b)$  slik at både

$$f_1(a, b) = 0$$

og

$$f_2(a, b) = 0.$$

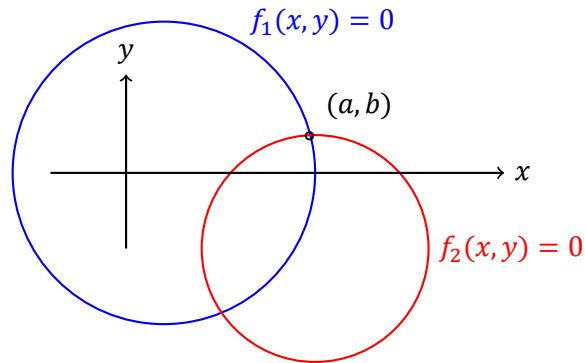
Ligningene

$$f_1(x, y) = 0$$

og

$$f_2(x, y) = 0$$

angir nivåkurver for funksjonene  $f_1$  og  $f_2$ . Punktet  $(a, b)$  må ligge på skjæringspunktet mellom disse.



Anta at du har en iterasjon  $(x_n, y_n)$ . Vi setter opp tangentplanene til  $f_1$  og  $f_2$  i  $(x_n, y_n)$

$$z - f_1(x_n, y_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n)(x - x_n) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n)(y - y_n)$$

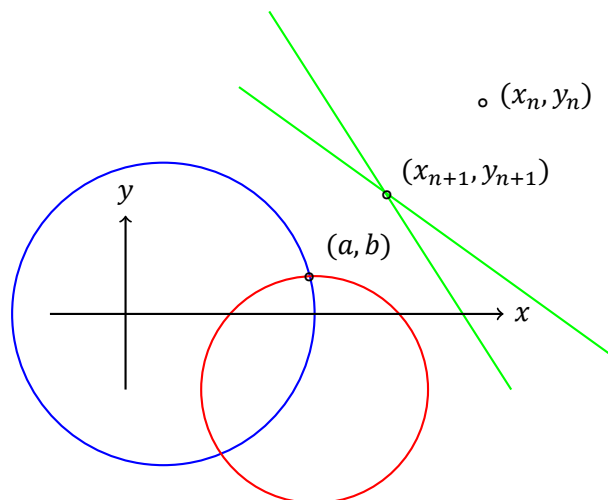
$$z - f_2(x_n, y_n) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n)(x - x_n) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n)(y - y_n).$$

Hvis vi krever at  $z = 0$ , får vi ligninger for skjæringslinjene mellom disse tangentplanene og  $(x, y)$ -planet

$$-f_1(x_n, y_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n)(x - x_n) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n)(y - y_n)$$

$$-f_2(x_n, y_n) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n)(x - x_n) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n)(y - y_n).$$

Iterasjonen  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  defineres som skjæringspunktet mellom disse linjene.



Altså er

$$-f_1(x_n, y_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n)(y_{n+1} - y_n)$$

$$-f_2(x_n, y_n) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n)(y_{n+1} - y_n).$$

et lineært ligningssystem som definerer  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ . Matrisen er

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

og vi skriver

$$-\begin{pmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} - x_n \\ y_{n+1} - y_n \end{pmatrix}.$$

Nå kan vi gange med

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1}$$

fra venstre, legge til  $(x_n, y_n)$  på begge sider, og få Newtons metode for systemer

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{pmatrix}.$$

Jeg gadd ikke skrive ut hva

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1}$$

er, men du kan regne det ut ved å huske fra lineæralgebraen at

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$