TMA4135 Matematikk 4D

Forelesningsnotater

Uke 39/40 - Laplacetransform

Disse forelesningsnotatene er ikke noen erstatning for læreboken, for den er en murstein, altså tar den flere tiår, en haug med slaver, samt et stort forlag, å skrive. Løsningsforslag til oppgavene underveis kommer bakerst. Satser på å få opp presisjonsnivået i notatene etterhvert. Feil sniker seg inn - finner du noen, send gjerne epost til morten.nome@gmail.com.

Definisjon og grunnleggende egenskaper

Vi definerer Laplacetransformasjon som

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt.$$

Vi skal bruke Laplacetransformasjon til å omskrive ordinære differensialligninger for f til algebraiske ligninger for $\mathcal{L}(f)$. La $s > 0$. Vi beregner

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\, dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt = s\mathcal{L}(f) - f(0),$$

og

$$\mathcal{L}(f'') = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\, dt = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0).$$

For å bruke dette, må vi beregne Laplacetransformasjon til noen vanlige funksjoner. For eksempel er

$$\mathcal{F}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a},$$

dersom $s > a$. Bakerst i notatet kommer en tabell med noen utvalgte Laplacetransformer. Det kan vises at laplacetransformen er unik - dersom to stykkvis kontinuerlige funksjoner f og g har samme laplacetransform, må $f = g$ nesten overalt.

$\boxed{1}$ Finn

$$\mathcal{L}(\cos t).$$

To spesielle funksjoner

Poenget med Laplace i dette kurset er å løse ordinære differensialligninger vi ikke kan løse med metodene vi lærte på gymnaset. I det følgende skal vi beskrive to funksjoner som modellerer to viktige fysiske situasjoner.

Heavisidefunksjonen

Heavisidefunksjonen er

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0. \end{cases}$$

Man kan tenke på denne som en funksjon som slår ting av og på. Vi kan flytte heavisidefunksjonen

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } t \geq a, \end{cases}$$

og endre på intervallet

$$u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{for } t \geq b. \end{cases}$$

La $a > 0$. Vi beregner

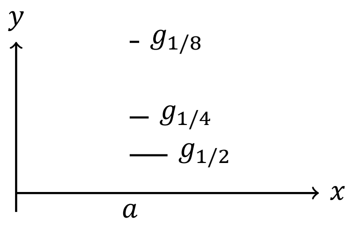
$$\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(v)e^{-s(v+a)}\,dv = e^{-as}\mathcal{L}(f(t)).$$

Deltafunksjonen

La

$$g_k(t-a) = \begin{cases} 1/k & \text{for } a < t < a+k \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Slik ser de ut:



Vi definerer

$$\delta(t) = \lim_{k \to 0} g_k(t) = \begin{cases} \infty & \text{for } t = a \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Denne funksjonen brukes til å modellere hammerslag eller lignende. Man kan også tenke på den som en funksjon som plukker ut funksjonsverdier. Vi beregner

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t)\ dt = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\int_a^{a+k} f(t)\ dt = f(a).$$

Laplacetransformen er lett å beregne.

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}\ dt = e^{-as}.$$

Differensialligninger

Vi bruker laplacetransformasjon til å løse differensialligninger på følgende vis. La

$$y' + y = 0 \qquad y(0) = 0.$$

Vi laplacetransformerer ligningen. Venstresiden blir

$$\mathcal{L}(y' + y) = \mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) = s\mathcal{L}(y) - 1 + \mathcal{L}(y) = (s+1)\mathcal{L}(y) - 1.$$

Merk bruken av initialbetingelsen $y(0) = 1$. Høyresiden blir

$$\mathcal{L}(0) = \int_0^\infty 0e^{-st}\ dt = 0.$$

Etter laplacetransformering står vi igjen med den algebraiske ligningen

$$(s+1)\mathcal{L}(y) - 1 = 0,$$

slik at

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s+1}.$$

Dette er en laplacetransform vi har beregnet, og kan følgelig slutte at

$$y(t) = e^{-t}.$$

$\boxed{2}$ Løs

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0.$$

$\boxed{3}$ Løs

$$y'' + y = \delta(t-a) - \delta(t-b) \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Løsningsforslag til oppgaver

$\boxed{1}$ Husk at

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

Vi beregner

$$\int_0^\infty e^{-st} \cos t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t} \, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right) = \frac{s}{s^2+1}.$$

$\boxed{2}$ Vi laplacetransformerer ligningen

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = s^2\mathcal{L}(y) - s + \mathcal{L}(y) = 0,$$

slik at

$$\mathcal{L}(y) = \frac{s}{s+1},$$

og

$$y(t) = \cos t.$$

$\boxed{3}$ Vi får

$$(s^2+1)\mathcal{L}(y) = e^{-as} - e^{-bs},$$

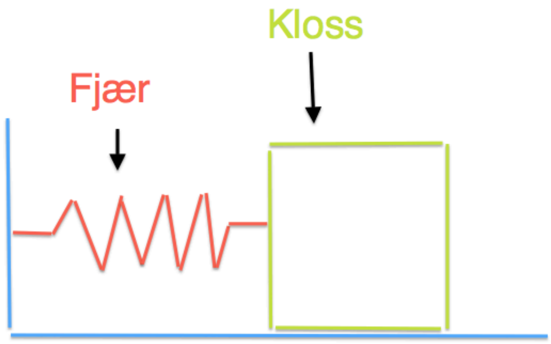
slik at

$$\mathcal{L}(y) = \frac{e^{-as}}{(s^2+1)} - \frac{e^{-bs}}{(s^2+1)},$$

altså er

$$y(t) = \sin(t-a)u(t-a) - \sin(t-b)u(t-b).$$

Den fysiske tolkningen er som følger. Ligningens venstreside beskriver en kloss og en fjær på friksjonsfritt underlag. Ved tiden $t = 0$ er systemet i ro. Ved tiden $t = a$ blir klossen dengt av en hammer fra venstre, som gir opphav til svingningen $\sin(t-a)$. Ved tiden $t = b$ blir klossen dengt av en hammer fra høyre, som gir opphav til svningningen $\sin(t-b)$.



Noen utvalgte laplacetransfomasjoner

f	$\mathcal{L}(f)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$