TMA4135 Matematikk 4D

Forelesningsnotater

Interpolasjon og numerisk integrasjon

Disse forelesningsnotatene er ikke noen erstatning for læreboken, for den er en murstein, altså tar den flere tiår, en haug med slaver, samt et stort forlag, å skrive. Feil sniker seg inn - finner du noen, send gjerne epost til morten.nome@gmail.com.

Polynominterpolasjon

Vi tenker oss at vi har $n+1$ punkter på intervallet $[a,b]$, og en funksjon $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Punktene kaller vi x_i der $0\le i\le n$, med $x_0=a$, $x_n=b$. For korthets skyld skriver vi $f(x_i)=f_i$. Oppgaven er å finne et polynom av grad n som reiser gjennom punktene (x_i,f_i).

Lagranges interpolasjon

For hvert punkt x_i, definerer vi et polynom $L_i(x)$ av orden n:

$$L_i(x)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}.$$

Polynomet $L_i(x)$ har egenskapen

$$L_i(x_k)=\begin{cases}1 & \text{for } i=k\\ 0 & \text{for } i\neq k\end{cases}.$$

Nå er det lett å sette opp et interpolerende polynom:

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f_iL_i(x).$$

Merk at $p_n(x_k)=f(x_k)$ for alle k. Konstruksjonen av Lagranges interpolasjon viser at det for en tabell med $n+1$ punkter eksisterer et interpolasjonspolynom av grad n; vi har jo nettopp konstruert det. Hvis vi antar at det finnes to forskjellige polynomer p_n og q_n av grad n som interpolerer den samme tabellen, og evaluerer differansen p_n-q_n i punktene x_i, ser vi at

$$p_n(x_i)-q_n(x_i)=0\qquad 0\le i\le n.$$

Men polynomet $p-q$ har grad n, og kan følgelig ikke ha $n+1$ nullpunkter, altså må $p=q$. Dette betyr at interpolasjonspolynomet er unikt.

Newtons interpolasjon

Vi begynner med et eksempel. Du kan sjekke at polynomet

$$p_2(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} - \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

interpolerer f_0, f_1 og f_2 i x_0, x_1 og x_2, henholdsvis. For å konstruere Newtons interpolasjon trenger vi å beregne noe som kalles de dividerte differansene. De defineres rekursivt slik:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

$$f[x_i, x_{i-1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f[x_i, \dots, x_{i-k}] = \frac{f[x_i, \dots, x_{i-k+1}] - f[x_{i-1}, \dots, x_{i-k}]}{x_i - x_{i-k}}$$

Merk at rekkefølgen på punktene har ingenting å si. Nå kan vi sette opp Newtons interpolasjon:

$$p_n(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{n} f[x_i, \dots, x_0] \prod_{k=0}^{i-1}(x - x_k).$$

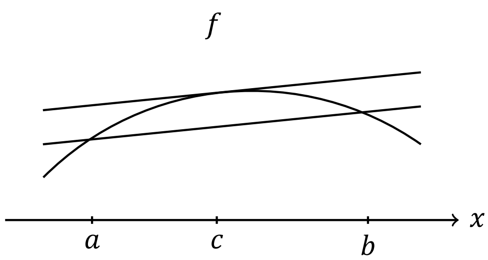
Merk også at Lagranges og Newtons interpolasjon er bare to forskjellige formler for å sette opp det samme polynomet, siden interpolasjonspolynomet er unikt.

En middelverdisats for dividerte differanser

Middelverdisatsen sier at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f[a, b]$$

for en funksjon som er deriverbar på $[a, b]$.



En generalisert variant av middelverdisatsen for dividerte differenser sier at dersom f er $n+1$ ganger deriverbar, og alle punktene x_i er forskjellige, er

$$f[x_n, ..., x_0] = \frac{f^n(s)}{n!}$$

for en eller annen s i intervallet $[a, b]$. Beviset er ikke så vrient. Siden p_n interpolerer f

$$p_n$$

må funksjonen $g = f - p_n$ ha minst $n+1$ nullpunkt på intervallet $[a, b]$. Gjentatt anvendelse av middelverdisatsen forteller oss at g' har minst n nullpunkt, at g'' har minst $n-1$ nullpunkt, og videre at g^{n+1} har minst ett nullpunkt på $[a, b]$. Vi kaller dette s. Siden

$$\frac{d^n}{dx^n} p_n(x) = n!\, f[x_n, ..., x_0],$$

må

$$f^n(s) = n!\, f[x_n, ..., x_0].$$

Interpolasjonsfeilen

Vi skriver opp Newtons interpolasjonspolynom

$$p_n(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f[x_i, ..., x_0] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) + f[x_n, ..., x_0] \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k).$$

Jeg har skrevet ut det siste leddet kun av pedagogiske hensyn. Nå bytter vi ut x_n med x i uttrykket over (tenk på x som et nytt interpolasjonspunkt), og får

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f[x_i, ..., x_0] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) + f[x, x_{n-1} ..., x_0] \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k),$$

slik at

$$f(x) - p_n(x) = (f[x, x_{n-1} ..., x_0] - f[x_n, x_{n-1}, ..., x_0]) \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k).$$

Nå er

$$f[x, x_{n-1} ..., x_0] - f[x_n, x_{n-1}, ..., x_0] = f[x, x_n, ..., x_0](x - x_n),$$

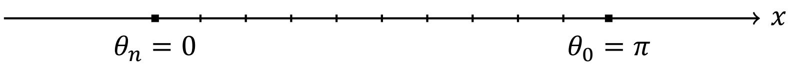
så da blir

$$f(x) - p_n(x) = f[x, x_n, ..., x_0] \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) = \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k),$$

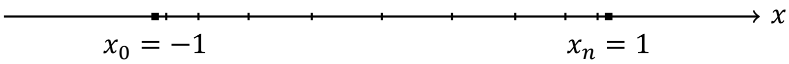
for en eller annen $s \in [a, b]$. Merk at s avhenger av x. Det siste polynomet kalles interpolasjonsfeilen.

Punktfordeling

Det er langt fra likegyldig hvilke punkter $\{x_i\}$ som brukes i interpolasjonen. La θ_i være et ekvidistant gitter på $[0, \pi]$, med $\theta_n = 0$ og $\theta_0 = \pi$. Dette gitteret går feil vei, men ikke tenk på det.



Nå definerer vi $x_i = \cos \theta_i$. Dette gitteret ligger på $[-1, 1]$, går rett vei, og ser slik ut.

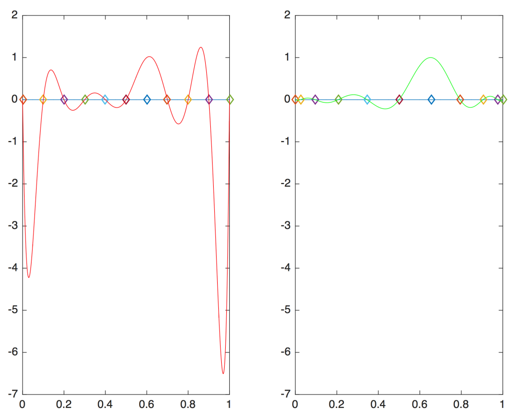


Det siste gitteret kalels chebyshevgitteret, og det er særdeles godt egnet til polynominterpolasjon. Det finnes andre gitre som er like bra, men mer kompliserte i bruk. Man finner gode punkter for interpolasjon ved å plassere dem slik at de minimerer utslaget til polynomet

$$\prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

i interpolasjonsfeilen, og chebyshevgitteret gjør nettopp dette.

Ekvidistant gitter, derimot, er håpløst for polynominterpolasjon. I figuren under er et lagrangepolynom plottet på et ekvidistant gitter og et chebyshevgitter, begge med elleve punkt. Merk de uheldige svingningene polynomet gjør på det ekvidistante gitteret.



Ekvidistant gitter vs chebyshevgitter

DFT - trigonometrisk interpolasjon

I dette avsnittet skal vi jobbe med det ekvidistante gitteret

$$x_k = \frac{2\pi k}{N} \quad \text{der} \quad 0 \le k \le N-1$$

på intervallet $[0, 2\pi]$. Vi ønsker å finne et trigonometrisk polynom

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{inx}$$

som interpolerer funksjonen f i gitterpunktene, altså at

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{inx_k} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{\frac{2\pi i}{N} kn}.$$

For å utlede koeffisientene c_n, kan vi gjøre som følger. Vi ganger ligningen over med e^{-imx} og summerer over alle gitterpunkter

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-imx} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{\frac{2\pi i}{N} k(n-m)}.$$

Nå bytter vi summasjonsrekkefølgen på høyre side, og får

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-imx} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} k(n-m)}.$$

Dersom $n \neq m$ er

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} k(n-m)} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{N}(n-m)}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi i}{N}(n-m)}\right)^N}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(n-m)}} = \frac{1 - e^{2\pi i(n-m)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(n-m)}} = 0,$$

og dersom $n = m$, er

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} k(n-m)} = \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = N,$$

slik at

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} k(n-m)} = N c_n.$$

Med andre ord er koeffisientene gitt ved

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)e^{-inx}.$$

Numerisk integrasjon

I det følgende skal vi se på metoder som tilnærmer integralet

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

ved å interpolere f, og så integrere intepolasjonspolynomet analytisk, altså at

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i,$$

der vi har definert $A_i = \int_a^b L_i(x)\ dx$; disse kalles vektene. Vi sier at en integrasjonsformel er eksakt for funksjonen f dersom

$$\int_a^b f\ dx = \sum_i f(x_i)A_i.$$

Dersom du interpolerer et polynom av grad n elller lavere med et polynom av grad n, blir interpolant og interpolatør identiske. Derfor må det være klart at

$$\int_a^b p(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i,$$

for alle polynomer av grad n eller lavere.

Gauss-kvadratur

La q være et polynom av grad $n+1$, som har den egenskap at

$$\int_a^b qp\ dx = 0 \tag{1}$$

for alle polynomer p av grad mindre enn eller lik n. Et polynom q som tilfredsstiller dette kravet, må ha nøyaktig $n+1$ nullpunkter på intervallet $[a,b]$. For dersom antallet nullpunkter x_i, kall det r, er lavere enn $n+1$, vil polynomet

$$\prod_{i=0}^{r-1}(x - x_i)$$

ha grad r, mens

$$\int_a^b q \prod_{i=0}^{r-1} (x - x_i)\ dx \neq 0,$$

slik at (1) blir motsagt. Dersom vi setter opp et interpolasjonsgitter med disse $n+1$ nullpunktene til q, vil

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \sum_i f(x_i) A_i$$

være eksakt for alle polynomer av grad mindre enn eller lik $2n+1$. Dette kan man vise som følger. La h være et polynom av grad $2n+1$ eller lavere, og del h på q, slik at

$$h = qp + r.$$

der p og r har maksimal grad n. (Dette er alltid mulig.) Nå er

$$h(x_i) = q(x_i)p(x_i) + r(x_i) = r(x_i),$$

siden $q(x_i) = 0$ for alle i. Siden integrasjonsregelen åpenbart er eksakt for polyonomer av orden n eller lavere, kan vi beregne

$$\int_a^b h(x)\ dx = \int_a^b q(x)p(x) + r(x)\ dx = \int_a^b r(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n} r(x_i) A_i = \sum_{i=0}^{n} q(x_i) A_i.$$

Her kommer et eksempel. La $n = 1$ og $[a, b] = [0, 1]$. Vi må finne

$$q(x) = ax^2 + bx + c.$$

Hvis vi krever at

$$\int_0^1 q(x)\ dx = \int_0^1 ax^2 + bx + c\ dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$$

og

$$\int_0^1 xq(x)\ dx = \int_0^1 ax^3 + bx^2 + cx\ dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0,$$

vil

$$\int_0^1 (ax + b) q(x)\ dx = 0.$$

Så får vi se hvor godt du husker matte 3. Ligningssystemet er

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi rekereduserer litt, og får

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Her står det at $a + b = 0$, og at $2a + 3b + 6c = 0$. Det finnes uendelig mange løsninger, og en av dem er

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix},$$

slik at

$$q(x) = 6x^2 - 6x + 1.$$

Nullpunktene til dette polynomet er

$$x_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad \text{og} \qquad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

så de tilhørende lagrangefunksjonene blir

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \sqrt{3}\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right)$$

og

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \sqrt{3}\left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right)$$

slik at

$$A_1 = \sqrt{3}\int_0^1 x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) dx = \frac{1}{2} = A_0.$$

Integrasjonsrutinen vi har laget skal være eksakt for alle polynomer opp til grad 3. Vi tester:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{4} = \int_0^1 x^3\,dx.$$