

## Forelesningsnotater

## Interpolasjon og numerisk integrasjon

Disse forelesningsnotatene er ikke noen erstatning for læreboken, for den er en murstein, altså tar den flere tiår, en haug med slaver, samt et stort forlag, å skrive. Feil sniker seg inn - finner du noen, send gjerne epost til morten.nome@gmail.com.

## Polynominterpolasjon

Vi tenker oss at vi har  $n + 1$  punkter på intervallet  $[a, b]$ , og en funksjon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Punktene kaller vi  $x_i$  der  $0 \leq i \leq n$ , med  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ . For korthets skyld skriver vi  $f(x_i) = f_i$ . Oppgaven er å finne et polynom av grad  $n$  som reiser gjennom punktene  $(x_i, f_i)$ .

## Lagranges interpolasjon

For hvert punkt  $x_i$ , definerer vi et polynom  $L_i(x)$  av orden  $n$ :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}.$$

Polynomet  $L_i(x)$  har egenskapen

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{for } i = k \\ 0 & \text{for } i \neq k \end{cases}.$$

Nå er det lett å sette opp et interpolerende polynom:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x).$$

Merk at  $p_n(x_k) = f(x_k)$  for alle  $k$ . Konstruksjonen av Lagranges interpolasjon viser at det for en tabell med  $n + 1$  punkter eksisterer et interpolasjonspolynom av grad  $n$ ; vi har jo nettopp konstruert det. Hvis vi antar at det finnes to forskjellige polynomer  $p_n$  og  $q_n$  av grad  $n$  som interpolerer den samme tabellen, og evaluerer differansen  $p_n - q_n$  i punktene  $x_i$ , ser vi at

$$p_n(x_i) - q_n(x_i) = 0 \quad 0 \leq i \leq n.$$

Men polynomet  $p - q$  har grad  $n$ , og kan følgelig ikke ha  $n + 1$  nullpunkter, altså må  $p = q$ . Dette betyr at interpolasjonspolynomet er unikt.

## Newtons interpolasjon

Vi begynner med et eksempel. Du kan sjekke at polynomet

$$p_2(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

interpolerer  $f_0, f_1$  og  $f_2$  i  $x_0, x_1$  og  $x_2$ , henholdsvis. For å konstruere Newtons interpolasjon trenger vi å beregne noe som kalles de dividerte differansene. De defineres rekursivt slik:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

$$f[x_i, x_{i-1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f[x_i, \dots, x_{i-k}] = \frac{f[x_i, \dots, x_{i-k+1}] - f[x_{i-1}, \dots, x_{i-k}]}{x_i - x_{i-k}}$$

Merk at rekkefølgen på punktene har ingenting å si. Nå kan vi sette opp Newtons interpolasjon:

$$p_n(x) = f_0 + \sum_{i=1}^n f[x_i, \dots, x_0] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k).$$

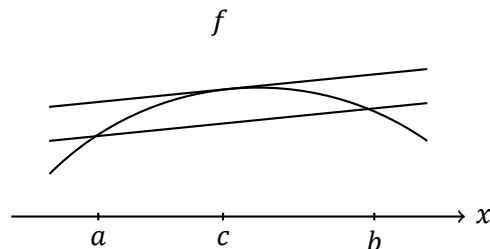
Merk også at Lagranges og Newtons interpolasjon er bare to forskjellige formler for å sette opp det samme polynomet, siden interpolasjonspolynomet er unikt.

## En middelverdisats for dividerte differanser

Middelverdisatsen sier at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f[a, b]$$

for en funksjon som er deriverbar på  $[a, b]$ .



En generalisert variant av middelverdisatsen for dividerte differenser sier at dersom  $f$  er  $n + 1$  ganger deriverbar, og alle punktene  $x_i$  er forskjellige, er

$$f[x_n, \dots, x_0] = \frac{f^n(s)}{n!}$$

for en eller annen  $s$  i intervallet  $[a, b]$ . Beviset er ikke så vrient. Siden  $p_n$  interpolerer  $f$

$$p_n$$

må funksjonen  $g = f - p_n$  ha minst  $n + 1$  nullpunkt på intervallet  $[a, b]$ . Gjentatt anvendelse av middelverdisatsen forteller oss at  $g'$  har minst  $n$  nullpunkt, at  $g''$  har minst  $n - 1$  nullpunkt, og videre at  $g^{n+1}$  har minst ett nullpunkt på  $[a, b]$ . Vi kaller dette  $s$ . Siden

$$\frac{d^n}{dx^n} p_n(x) = n! f[x_n, \dots, x_0],$$

må

$$f^n(s) = n! f[x_n, \dots, x_0].$$

### Interpolasjonsfeilen

Vi skriver opp Newtons interpolasjonspolynom

$$p_n(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f[x_i, \dots, x_0] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) + f[x_n, \dots, x_0] \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k).$$

Jeg har skrevet ut det siste leddet kun av pedagogiske hensyn. Nå bytter vi ut  $x_n$  med  $x$  i uttrykket over (tenk på  $x$  som et nytt interpolasjonspunkt), og får

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f[x_i, \dots, x_0] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) + f[x, x_{n-1}, \dots, x_0] \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k),$$

slik at

$$f(x) - p_n(x) = (f[x, x_{n-1}, \dots, x_0] - f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]) \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k).$$

Nå er

$$f[x, x_{n-1}, \dots, x_0] - f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] = f[x, x_n, \dots, x_0](x - x_n),$$

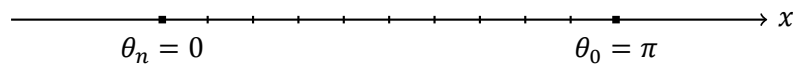
så da blir

$$f(x) - p_n(x) = f[x, x_n, \dots, x_0] \prod_{k=0}^n (x - x_k) = \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k),$$

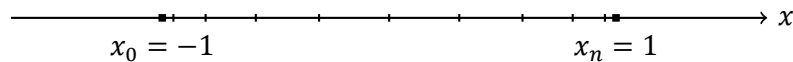
for en eller annen  $s \in [a, b]$ . Merk at  $s$  avhenger av  $x$ . Det siste polynomet kalles interpolasjonsfeilen.

### Punktfordeling

Det er langt fra likegyldig hvilke punkter  $\{x_i\}$  som brukes i interpolasjonen. La  $\theta_i$  være et ekvidistant gitter på  $[0, \pi]$ , med  $\theta_n = 0$  og  $\theta_0 = \pi$ . Dette gitteret går feil vei, men ikke tenk på det.



Nå definerer vi  $x_i = \cos \theta_i$ . Dette gitteret ligger på  $[-1, 1]$ , går rett vei, og ser slik ut.



Det siste gitteret kalles chebyshev-gitteret, og det er særdeles godt egnet til polynominterpolasjon. Det finnes andre gittere som er like bra, men mer kompliserte i bruk. Man finner gode punkter for interpolasjon ved å plassere dem slik at de minimerer utslaget til polynomet

$$\prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

i interpolasjonsfeilen, og chebyshev-gitteret gjør nettopp dette.

Ekvidistant gitter, derimot, er håpløst for polynominterpolasjon. I figuren under er et lagrangepolynom plottet på et ekvidistant gitter og et chebyshev-gitter, begge med elleve punkt. Merk de uheldige svingningene polynomet gjør på det ekvidistante gitteret.

### DFT - trigonometrisk interpolasjon

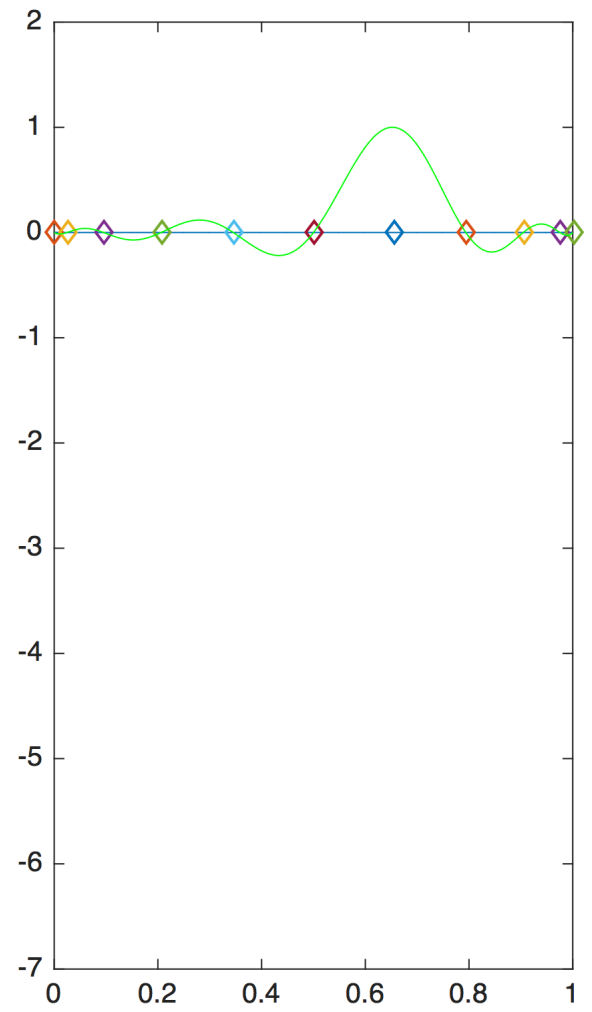
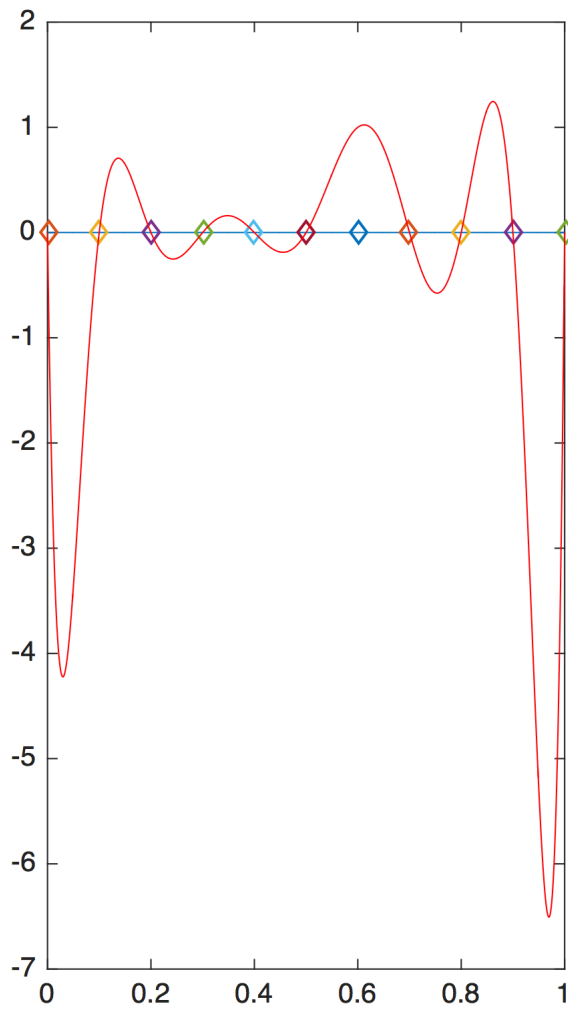
I dette avsnittet skal vi jobbe med det ekvidistante gitteret

$$x_k = \frac{2\pi k}{N} \quad \text{der} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

på intervallet  $[0, 2\pi]$ . Vi ønsker å finne et trigonometrisk polynom

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{inx}$$

som interpolerer funksjonen  $f$  i gitterpunktene, altså at



Ekvidistant gitter vs chebyshev gitter

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{inx_k} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{\frac{2\pi i}{N} kn}.$$

## Numerisk integrasjon

I det følgende skal vi se på metoder som tilnærmer integralet

$$\int_a^b f(x) dx$$

ved å interpolere  $f$ , og så integrere interpolasjonspolynomet analytisk, altså at

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) A_i,$$

der vi har definert  $A_i = \int_a^b L_i(x) dx$ ; disse kalles vektene. Vi sier at en integrasjonsformel er eksakt for funksjonen  $f$  dersom

$$\int_a^b f dx = \sum_i f(x_i) A_i.$$

Dersom du interpolerer et polynom av grad  $n$  eller lavere med et polynom av grad  $n$ , blir interpolant og interpolatør identiske. Derfor må det være klart at

$$\int_a^b p(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) A_i,$$

for alle polynomer av grad  $n$  eller lavere.

## Gauss-kvadratur

La  $q$  være et polynom av grad  $n + 1$ , som har den egenskap at

$$\int_a^b qp dx = 0 \tag{1}$$

for alle polynomer  $p$  av grad mindre enn eller lik  $n$ . Et polynom  $q$  som tilfredsstiller dette kravet, må ha nøyaktig  $n + 1$  nullpunkter på intervallet  $[a, b]$ . For dersom antallet nullpunkter  $x_i$ , kalt det  $r$ , er lavere enn  $n + 1$ , vil polynomet

$$\prod_{i=0}^{r-1} (x - x_i)$$

ha grad  $r$ , mens

$$\int_a^b q \prod_{i=0}^{r-1} (x - x_i) dx \neq 0,$$

slik at (1) blir motsagt. Dersom vi setter opp et interpolasjonsgitter med disse  $n + 1$  nullpunktene til  $q$ , vil

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_i f(x_i)A_i$$

være eksakt for alle polynomer av grad mindre enn eller lik  $2n + 1$ . Dette kan man vise som følger. La  $h$  være et polynom av grad  $2n + 1$  eller lavere, og del  $h$  på  $q$ , slik at

$$h = qp + r.$$

der  $p$  og  $r$  har maksimal grad  $n$ . (Dette er alltid mulig.) Nå er

$$h(x_i) = q(x_i)p(x_i) + r(x_i) = r(x_i),$$

siden  $q(x_i) = 0$  for alle  $i$ . Siden integrasjonsregelen åpenbart er eksakt for polynomer av orden  $n$  eller lavere, kan vi beregne

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b q(x)p(x) + r(x) dx = \int_a^b r(x) dx = \sum_{i=0}^n r(x_i)A_i = \sum_{i=0}^n q(x_i)A_i.$$

Her kommer et eksempel. La  $n = 1$  og  $[a, b] = [0, 1]$ . Vi må finne

$$q(x) = ax^2 + bx + c.$$

Hvis vi krever at

$$\int_0^1 q(x) dx = \int_0^1 ax^2 + bx + c dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$$

og

$$\int_0^1 xq(x) dx = \int_0^1 ax^3 + bx^2 + cx dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0,$$

vil

$$\int_0^1 (ax + b)q(x) dx = 0.$$

Så får vi se hvor godt du husker matte 3. Ligningssystemet er

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi rekereduserer litt, og får

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Her står det at  $a + b = 0$ , og at  $2a + 3b + 6c = 0$ . Det finnes uendelig mange løsninger, og en av dem er

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix},$$

slik at

$$q(x) = 6x^2 - 6x + 1.$$

Nullpunktene til dette polynomet er

$$x_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{og} \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

så de tilhørende lagrangefunksjonene blir

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \sqrt{3} \left( x - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \right)$$

og

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \sqrt{3} \left( x - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \right)$$

slik at

$$A_1 = \sqrt{3} \int_0^1 x - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) dx = \frac{1}{2} = A_0.$$

Integrasjonsrutinen vi har laget skal være eksakt for alle polynomer opp til grad 3. Vi tester:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 dx.$$