Fourieranalyse

Fourierrekker på reell form

En funksjon sies å ha periode $p > 0$ dersom

$$f(x+p) = f(x) \tag{1}$$

for alle x i definisjonsmengden til f. Den minste p slik at (1) holder, kalles fundamentalperioden til f. Standardeksemplet er $f(x) = \sin x$, som har perioder 2π, 4π, 6π osv, og fundamentalperiode 2π.

Eksempel La

$$f(x) = \cos(3x)$$

Hva er periodene til f? Hva er fundamentalperioden til f? Dersom $f(x)$ har periode p, har $g(x) = f(kx)$ periode p/k, for

$$g(x) = f(kx) = f(kx+p) = f(k(x+p/k)) = g(x+p/k).$$

Altså har $\cos 3x$ perioder $p = 2n\pi/3$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalperioden er $p = 2\pi/3$.

En fourierrekke er en rekke på formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Merk at fourierrekken har fundamentalperiode $2L$. La f være en funksjon med definisjonsmengde $(-L, L)$. Fourieranalyse handler om å skrive f som en fourierrekke:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{2}$$

For å bestemme koeffisientene a_n ganger vi (2) med $\cos\frac{m\pi x}{L}$ og integrerer fra $-L$ til L

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \tag{3}$$

$$\int_{-L}^{L}\left(a_0\cos\frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\right)dx.$$

Vi beregner så

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 2L & \text{for } m = 0 \\ 0 & \text{for } m \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\ dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\frac{(n+m)\pi}{L}x + \cos\frac{(n-m)\pi}{L}x\ dx = \begin{cases} L & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\ dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \sin\frac{(n+m)\pi}{L}x + \sin\frac{(n-m)\pi}{L}x\ dx = 0.$$

Dersom vi bruker disse resultatene i (3), står vi igjen med

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{l}^{L} f(x)\ dx$$

og

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{l}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

for $n \geq 1$. Likeledes kan vi utlede formelen

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{l}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

ved å gange (2) med $\sin\frac{m\pi x}{L}$ og integrere fra $-L$ til L.

Teorem Dersom f er stykkvis kontinuerlig deriverbar på $(-L, L)$, konvergerer fourierrekken $f(x)$ for alle punkter der f er kontinuerlig. I punkter der f har sprang, konvergerer fourierrekken til midt i spranget.

Eksempel Vi finner fourierrekken til

$$f(x) = x \quad \text{der} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Her er $L = \pi$. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\ dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\ dx = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\ dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Merk at symmetri gir a_0 og a_n, mens b_n må beregnes. Fourierrekken til f blir

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

$\boxed{\text{Eksempel}}$ Vi finner heavisidefunksjonen

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

sin fourierrekke på $(-\pi, \pi)$. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2},$$

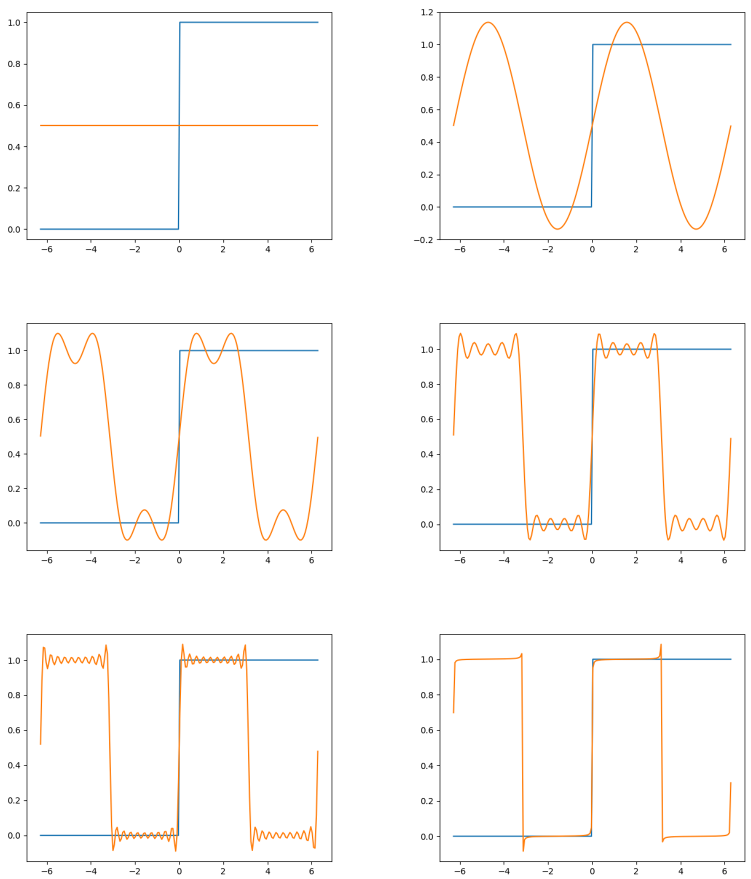
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx\, dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{for } n \text{ oddetall} \\ 0 & \text{for } n \text{ partall.} \end{cases}$$

Altså kan vi skrive

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$$

Her er plot av et par partialsummene for $n = 0, 1, 2, 5, 10$ og 50. Jeg har plottet på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ for å illustrere hvordan fourierrekken oppfører seg utenfor intervallet der man approksimerer funksjonen. Merk at $H - \frac{1}{2}$ er en odde funksjon. Denne strukturen kommer til syne i



fourierrekken til H, se neste avsnitt.

Odde og jevne utvidelser

Vi sier at en funksjon er odde dersom

$$f(-x) = -f(x)$$

og jevn dersom

$$f(-x) = f(x).$$

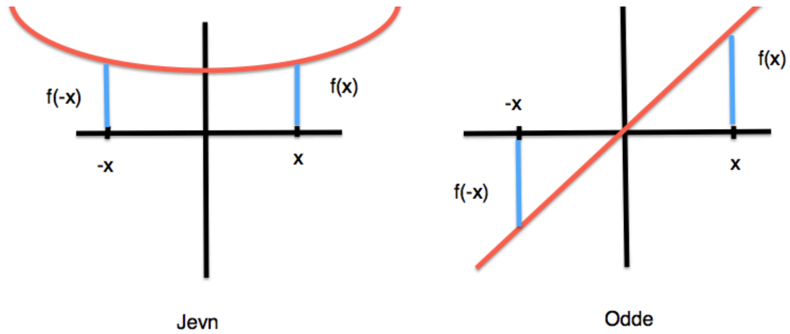
for alle x i definisjonsmengden til f. Grafen til en odde funksjon blir identisk dersom du dreier den π radianer om origo, mens grafen til en jevn funksjon blir identisk dersom du speiler den om y-aksen. En rask kikk på figur overbeviser oss om at

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$$

for odde funksjoner, og

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

for jevne funksjoner.



Eksempel Man kan vise at produktet av to jevne eller to odde funksjoner blir en jevn funksjon, og at produktet av en jevn og en odde funksjon blir en odde funksjon. La f være odde og g være jevn. Siden $f(-x) = -f(x)$, og $g(-x) = g(x)$, får vi

$$f(-x)g(-x) = -f(x)g(x),$$

altså er fg en odde funksjon. De andre tilfellene bevises på samme måte.

Vi merker oss at dersom f er odde, er $a_n = 0$ for alle n, mens dersom f er jevn, er $b_n = 0$ for alle n. Fourierrekken til en odde funksjon inneholder følgelig kun sinusfunksjoner, mens fourierrekken til jevne funksjoner inneholder kun cosinusfunksjoner.

Dersom en funksjon f har definisjonsmengde $(0, L)$, kan vi definere den odde utvidelsen

$$f_o = \begin{cases} f(x) & \text{for } x = (0, L) \\ -f(-x) & \text{for } x = (-L, 0) \end{cases}$$

og den jevne utvidelsen

$$f_j = \begin{cases} f(x) & \text{for } x = (0, L) \\ f(-x) & \text{for } x = (-L, 0). \end{cases}$$

Siden både f_o og f_j er identiske med f på $(0, L)$, vil fourierrekkene deres konvergere til $f(x)$ på $(0, L)$. Man kan således velge mellom sinus eller cosinus når man skal fourierutvikle f på $(0, L)$.

Vi ser på fourierutviklingen til f_o. For den har vi at $a_n = 0$ for alle n, og at

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_o(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

For fourierutviklingen til f_j, har vi tilsvarende at

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_j(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Fourierrekker på kompleks form

Fra den komplekse analysen husker vi Eulers formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Denne er lett å utlede. Vi har

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots = 1 + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

og

$$i \sin x = i\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) = ix + \frac{(ix)^3}{3} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

Disse rekkene konvergerer for alle x. Altså er

$$\cos x + i \sin x = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots = e^{ix}.$$

Substituerer vi inn nx for x, får vi de Moivres formel

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx.$$

Vi skal i dette avsnittet skrive

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}. \tag{4}$$

Denne formen er mer praktisk å jobbe med enn sinus- og cosinusfunksjoner. For å bestemme koeffisien-tene c_n, ganger vi (4) med $e^{-i\frac{m\pi x}{L}}$, og integrerer fra $-L$ til L

$$\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{m\pi x}{L}}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-L}^{L} e^{i\frac{(n-m)\pi}{L}x}\, dx.$$

Dersom $n = m$, får vi

$$\int_{-L}^{L} e^{i\frac{(n-m)\pi}{L}x}\,dx = \int_{-L}^{L}\,dx = 2L.$$

Dersom $n \neq m$, får vi

$$\int_{-L}^{L} e^{i\frac{(n-m)\pi}{L}x}\,dx = \frac{1}{i(n-m)\pi}\left(e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}\right) = \frac{2}{(n-m)\pi}\sin(n-m)\pi = 0.$$

Altså er

$$\int_{-L}^{L} e^{i\frac{(n-m)\pi}{L}x}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ 2L & \text{for } n = m, \end{cases}$$

slik at

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,dx = c_n.$$

Vi kan utlede formler for overgangen mellom fourierrekker på reell og kompleks form. Substituerer vi $-x$ for x i de Moivres formel får vi

$$e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx.$$

Vi kan legge dem sammen

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},$$

og trekke dem fra hverandre

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Hvis vi skriver

$$\begin{aligned} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L} &= a_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i}\right) \\ &= e^{i\frac{n\pi x}{L}}\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) \end{aligned}$$

og sammenligner vi (2) og (4), ser vi at

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

og

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Vi kan selvfølgelig også snu om på disse formlene, og skrive

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

og

$$b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Parsevals identitet

For funksjoner med konvergente fourierrekker gjelder Parsevals identitet

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\, dx.$$

Denne er lettest å bevise om man starter på kompleks form

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}. \tag{5}$$

Husk at for komplekse tall gjelder $z\bar{z} = |z|$. Vi

Fouriertransform

Hva gjør vi dersom vi ønsker å fourierutvikle en funksjon som ikke er periodisk? En magefølelse for hvordan dette skal gjøres, kan man få ved å skrive

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{-i\frac{n\pi}{L}y}\, dy\right) e^{i\frac{n\pi x}{L}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{-i\frac{n\pi}{L}y}\, dy\right) e^{i\frac{n\pi x}{L}}. \end{aligned}$$

Nå kan man tolke dette som en riemannsum på aksen der n telles fra $-\infty$ til ∞. Gitteravstanden er $\frac{\pi}{L}$, og punktene er gitt ved $\frac{n\pi}{L}$. Hvis vi lar $L \to \infty$, vifter vi det vi kan med armer og bein og får

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iwy}\, dy\right) e^{iwx}\, dw.$$

Det innerste integralet kalles fouriertransformen til f, og vi skriver

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\, dx.$$

Det ytterste integralet kalles den inverse fouriertransformen, og vi skriver

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)e^{iwx}\, dw.$$

Siden

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

ser vi at det gir ingen mening å stappe inn en funksjon som ikke lar seg integrere på hele x-aksen. Det er vanlig å kreve at f er absolutt integrerbar, altså at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Fouriertranformasjonen er en lineær operasjon. Dersom a og b er relle tall, og f og g er funksjoner, er

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

La f' være absolutt integrerbar på x-aksen, og anta at $f(x) \to 0$ når $x \to \pm\infty$. Vi kan vise at

$$\mathcal{F}(f') = iw\mathcal{F}(f).$$

Vi tar en delvis integrasjon, og regner ut

$$\mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx}\, dx = f(x)e^{iwx}\Big|_{-\infty}^{\infty} + iw\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\, dx = iw\mathcal{F}(f).$$

Vi definerer kovolusjon mellom to funksjoner f og g som

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(x - v)\, dv.$$

Det kan vises at

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g).$$