

Forelesningsnotater

Uke 34/35/38 - Fourieranalyse

Disse forelesningsnotatene er ikke noen erstatning for læreboken, for den er en murstein, altså tar den flere tiår, en haug med slaver, samt et stort forlag, å skrive. Løsningsforslag til oppgavene underveis kommer bakerst. Satser på å få opp presisjonsnivået i notatene etterhvert. Feil sniker seg inn - finner du noen, send gjerne epost til morten.nome@gmail.com.

1 Fourierrekker på reell form

En funksjon sies å ha periode $p > 0$ dersom

$$f(x + p) = f(x) \quad (1)$$

for alle x i definisjonsmengden til f . Den minste p slik at (1) holder, kalles fundamentalperioden til f . Standardeksemplet er $f(x) = \sin x$, som har perioder $2\pi, 4\pi, 6\pi$ osv, og fundamentalperiode 2π .

1 La

$$f(x) = \cos(3x)$$

Hva er periodene til f ? Hva er fundamentalperioden til f ?

En fourierrekke er en rekke på formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x.$$

Merk at fourierrekken har fundamentalperiode $2L$. La f være en funksjon med definisjonsmengde $(-L, L)$. Fourieranalyse handler om å skrive f som en fourierrekke:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x. \quad (2)$$

For å bestemme koeffisientene a_n ganger vi (2) med $\cos \frac{m\pi}{L}x$ og integrerer fra $-L$ til L

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi}{L}x \, dx = \int_{-L}^L \left(a_0 \cos \frac{m\pi}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x \cos \frac{m\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \cos \frac{m\pi}{L}x \right) dx. \quad (3)$$

Vi beregner så

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi}{L} x \, dx = \begin{cases} 2L & \text{for } m = 0 \\ 0 & \text{for } m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{(n+m)\pi}{L} x + \cos \frac{(n-m)\pi}{L} x \, dx = \begin{cases} L & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{(n+m)\pi}{L} x + \sin \frac{(n-m)\pi}{L} x \, dx = 0.$$

Dersom vi bruker disse resultatene i (3), står vi igjen med

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \, dx$$

og

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

for $n \geq 1$. Likeledes kan vi utlede formelen

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

ved å gange (2) med $\sin \frac{m\pi}{L} x$ og integrere fra $-L$ til L .

Dersom f er stykkvis kontinuert og deriverbar på $(-L, L)$, konvergerer fourierrekken $f(x)$ for alle punkter der f er kontinuert. I punkter der f har sprang, konvergerer fourierrekken til midt i spranget.

2 Finn fourierrekken til

$$f(x) = x \quad \text{der } x \in (-\pi, \pi).$$

2 Odde og jevne utvidelser

Vi sier at en funksjon er odde dersom

$$f(-x) = -f(x)$$

og jevn dersom

$$f(-x) = f(x).$$

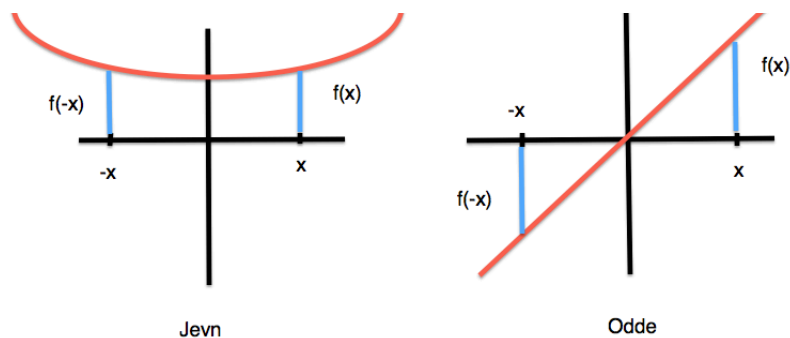
for alle x i definisjonsmengden til f . Grafen til en odde funksjon blir identisk dersom du dreier den π radianer om origo, mens grafen til en jevn funksjon blir identisk dersom du speiler den om y -aksen. En rask kikk på figur overbeviser oss om at

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0$$

for odde funksjoner, og

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

for jevne funksjoner.



-
- 3] Vis at produktet av to jevne eller to odde funksjoner blir en jevn funksjon, og at produktet av en jevn og en odde funksjon blir en odde funksjon.
-

Vi merker oss at dersom f er odde, er $a_n = 0$ for alle n , mens dersom f er jevn, er $b_n = 0$ for alle n . Fourierrekken til en odde funksjon inneholder følgelig kun sinusfunksjoner, mens fourierrekken til jevne funksjoner inneholder kun cosinusfunksjoner.

Dersom en funksjon f har definisjonsmengde $(0, L)$, kan vi definere den odde utvidelsen

$$f_o = \begin{cases} f(x) & \text{for } x = (0, L) \\ -f(-x) & \text{for } x = (-L, 0) \end{cases}$$

og den jevne utvidelsen

$$f_j = \begin{cases} f(x) & \text{for } x = (0, L) \\ f(-x) & \text{for } x = (-L, 0). \end{cases}$$

Siden både f_o og f_j er identiske med f på $(0, L)$, vil fourierrekkenes deres konvergere til $f(x)$ på $(0, L)$. Man kan således velge mellom sinus eller cosinus når man skal fourierutvikle f på $(0, L)$.

Vi ser på fourierutviklingen til f_o . For den har vi at $a_n = 0$ for alle n , og at

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_o(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

For fourierutviklingen til f_j , har vi tilsvarende at

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_j(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

4 Vi definerer Heaviside-funksjonen

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

Finn Heavisidefunksjonens fourierrekke på $(-\pi, \pi)$.

3 Fourierrekker på kompleks form

Fra den komplekse analysen husker vi Eulers formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Substituerer vi inn nx for x , får vi de Moivres formel

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx.$$

5 Utled Eulers formel. Hint: se på maclaurinrekkene til e^x , $\cos x$ og $\sin x$.

Vi skal i dette avsnittet skrive

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} x}. \quad (4)$$

Denne formen er mer praktisk å jobbe med enn sinus- og cosinusfunksjoner. For å bestemme koeffisientene c_n , ganger vi (4) med $e^{-i \frac{m\pi}{L} x}$, og integrerer fra $-L$ til L

$$\int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{m\pi}{L} x} \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-L}^L e^{i \frac{(n-m)\pi}{L} x} \, dx.$$

Siden

$$\int_{-L}^L e^{i\frac{(n-m)\pi}{L}x} dx = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ 2L & \text{for } n = m, \end{cases} \quad (5)$$

får vi

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{m\pi}{L}x} dx = c_n.$$

6 Vis (5).

Vi kan også utlede formler for overgangen mellom fourierrekker på reell og kompleks form. Substituerer vi $-x$ for x i de Moivres formel

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

får vi

$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx.$$

Vi kan legge dem sammen

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},$$

og trekke dem fra hverandre

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Hvis vi skriver

$$\begin{aligned} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x &= a_n \left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2i} \right) \\ &= e^{i\frac{n\pi}{L}x} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) + e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) \end{aligned}$$

og sammenligner vi (2) og (4), ser vi at

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

og

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Vi kan selvfølgelig også snu om på disse formlene, og skrive

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

og

$$b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

4 Fouriertransformasjon

Hva gjør vi dersom vi ønsker å fourierutvikle en funksjon som ikke er periodisk? En magesfølelse for hvordan dette skal gjøres, kan man få ved å skrive

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i\frac{n\pi}{L}y} dy \right) e^{i\frac{n\pi}{L}x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i\frac{n\pi}{L}y} dy \right) e^{i\frac{n\pi}{L}x}. \end{aligned}$$

Nå kan man tolke dette som en riemannsum på akse der n telles fra $-\infty$ til ∞ . Gitteravstanden er $\frac{\pi}{L}$, og punktene er gitt ved $\frac{n\pi}{L}$. Hvis vi lar $L \rightarrow \infty$, vifter vi det vi kan med armer og bein og får

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iwy} dy \right) e^{iwx} dw.$$

Det innerste integralet kalles fouriertransformasjonen til f , og vi skriver

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx.$$

Det ytterste integralet kalles den inverse fouriertransformasjonen, og vi skriver

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{iwx} dw.$$

Siden

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

ser vi at det gir ingen mening å stappe inn en funksjon som ikke lar seg integrere på hele x -aksen. Det er vanlig å kreve at f er absolutt integrerbar, altså at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Fouriertransformasjonen er en lineær operasjon. Dersom a og b er reelle tall, og f og g er funksjoner, er

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

7 La f' være absolutt integrerbar på x -aksen, og anta at $f(x) \rightarrow 0$ når $x \rightarrow \pm\infty$. Vis at

$$\mathcal{F}(f') = iw\mathcal{F}(f).$$

Løsningsforslag til oppgaver

- 1] Dersom $f(x)$ har periode p , har $g(x) = f(kx)$ periode p/k , for

$$g(x) = f(kx) = f(kx + p) = f(k(x + p/k)) = g(x + p/k).$$

Altså har $\cos 3x$ perioder $p = 2n\pi/3$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalperioden er $p = 2\pi/3$.

- 2] Her er $L = \pi$. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

Merk at symmetri gir a_0 og a_n , mens b_n må beregnes. Fourierrekken til f blir

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

- 3] La f være odde og g være jevn. Siden $f(-x) = -f(x)$, og $g(-x) = g(x)$, får vi

$$f(-x)g(-x) = -f(x)g(x),$$

altså er fg en odde funksjon. De andre tilfellene bevises på samme måte.

- 4] Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = 0,$$

og

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{for } n \text{ oddetall} \\ 0 & \text{for } n \text{ partall.} \end{cases}$$

Altså kan vi skrive

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$$

Merk at $H - \frac{1}{2}$ er en odde funksjon. Denne strukturen kommer til syne i fourierrekken til H .

5 Vi har

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots = 1 + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

og

$$i \sin x = i \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) = ix + \frac{(ix)^3}{3} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

Disse rekkene konvergerer for alle x . Altså er

$$\cos x + i \sin x = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots = e^{ix}.$$

6 Dersom $n = m$, får vi

$$\int_{-L}^L e^{i \frac{(n-m)\pi}{L} x} dx = \int_{-L}^L dx = 2L.$$

Dersom $n \neq m$, får vi

$$\int_{-L}^L e^{i \frac{(n-m)\pi}{L} x} dx = \frac{1}{i(n-m)\pi} (e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}) = \frac{2}{(n-m)\pi} \sin(n-m)\pi = 0.$$

Altså er

$$\int_{-L}^L e^{i \frac{(n-m)\pi}{L} x} dx = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ 2L & \text{for } n = m. \end{cases}$$

7 Vi tar en delvis integrasjon, og regner ut

$$\mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-iwx} dx = f(x) e^{iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + iw \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx = iw \mathcal{F}(f).$$