Øving 8

1 Oppgave 3 gitt til eksamen i TMA4135 Matematikk 4D, høsten 2005

a) Finn alle løsninger på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ til differensialligningen

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} \quad \text{for} \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \ge 0. \tag{2}$$

b) Finn $u(x,t)$ som oppfyller (1) og (2) samt initialbetingelsene

$$u(x,0) = 0 \quad \text{og} \quad u_t(x,0) = \sin 4x.$$

2 Vis at randbetingelsene, $u(0,t) = u(L,t) = 0$, gir at funksjonen f må være odde og ha periode $2L$, der

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[f(x+ct) + f(x-ct)\big]$$

er d'Alemberts løsning til bølgeligningen med initialbetingelser $u(x,0) = f(x)$ og $u_t(x,0) = 0$.

3 Løs diffusjonsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

og initialbetingelse

$$f(x) = \begin{cases} U_0 & \text{for } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{for } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$$

der U_0 er en konstant forskjellig fra 0.

Fasit: $u(x,t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^2 \frac{n\pi}{4} \sin nx\, e^{-n^2c^2t} = \frac{4U_0}{\pi}\big(\frac{1}{2}\sin x\, e^{-c^2t} + \frac{1}{2}\sin 2x\, e^{-4c^2t} + \cdots\big)$.

$\boxed{4}$ Oppgave 2 gitt til eksamen i TMA4135 Matematikk 4D, sommeren 2008

a) Finn alle løsninger på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ til differensialligningen

$$u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{3}$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

b) I tillegg til (3) og (4) innfører vi nå initialbetingelsen

$$u(x,0) = \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x. \tag{5}$$

Finn funksjonen $u(x,t)$ som oppfyller (3), (4) og (5).

$\boxed{5}$ Løs den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

som tilfredstiller initialbetingelsen

$$u(x,0) = f(x) = e^{-k|x|} \qquad (k > 0),$$

der løsningen er på formen

$$u(x,t) = \int_0^\infty \big[A(p)\cos px + B(p)\sin px\big] e^{-c^2p^2t} \, \mathrm{d}p.$$

Fasit: $u(x,t) = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos px}{p^2+k^2} e^{-c^2p^2t} \, \mathrm{d}p$.