TMA4125 Matematikk 4D Høst 2011

Øving 12

1 Oppgave 6 gitt til eksamen i SIF5017 Matematikk 4D, høsten 2001

a) Approksimer løsningen til det lineære systemet

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ved å bruke Gauss–Seidels metode og $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. Utfør to iterasjoner.

b) På systemet

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

er det umulig å bruke Gauss–Seidels metode. Forklar hvorfor.

En måte å løse det på med en iterativ metode er ved å skrive $A = M - N$, som gir $M\mathbf{x}^{(n+1)} = N\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b}$. Hva må kreves av M? Gjør et fornuftig valg av M og utfør én iterasjon.

2 Oppgave 6 gitt til eksamen i TMA4135 Matematikk 4D, sommeren 2004

Gjør ett steg med Heuns metode med skrittlengde $h = 0{,}1$ på differensialligningen

$$y'(t) = 3yt + 1, \qquad y(1) = 1.$$

3 Oppgave 6 gitt til eksamen i TMA4135 Matematikk 4D, høsten 2007

a) Gitt problemet

$$y' = 50(\cos t - y), \qquad y(0) = 0. \tag{$*$}$$

Finn en tilnærmelse y_1 til $y(0{,}1)$ ved bruk av den 4. ordens Runge–Kutta metoden

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned}$$

etter ett skritt med $h = 0{,}1$ og hvor $f(t, y) = y' = 50(\cos t - y)$.

b) Bergen $y_1 \approx y(0{,}1)$ ved bruk av baklengs (implisitt) Euler med ett skritt ($h = 0{,}1$),

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}),$$

og sammenlign resultatet med den eksakt løsningen til $(*)$ som er

$$y(t) = \frac{50}{2501}\left(50\cos t + \sin t - 50e^{-50t}\right).$$

Sammenlign med resultatet i **a)** og forklar det du ser.

$\boxed{4}$ Oppgave 7 gitt til eksamen i TMA4135 Matematikk 4D, sommeren 2005

Vi betrakter initialverdiproblemet

$$x'' + 2x' - x = 3 - t, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 2. \tag{$*$}$$

a) Skriv $(*)$ som et initialverdiproblem for et system av to førsteordens differensialligninger. Det vil si av formen $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

b) Gjør ett skritt med Heuns metode, med skrittlengde $h = 0{,}1$, på systemet du fant i **a)**.