



1] Oppgave 6 gitt til eksamen i TMA4135 Matematikk 4D, høsten 2008

Tredjegradspolynomet

$$p(x) = x^3 - x - 1,$$

har en rot s som ligger i intervallet $I = [1, 1,5]$.

a) Gitt følgende tre fikspunktiterasjoner,

$$\begin{aligned} 1) \quad & x_{n+1} = x_n^3 - 1, \\ 2) \quad & x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}, \\ 3) \quad & x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1}. \end{aligned}$$

Hvilken av disse ville du valgt for å finne s ? Begrunn svaret. Bruk iterasjoner med startverdi $x_0 = 1$ og regn ut s med tre korrekte siffer.

b) En alternativ måte å approksimere s på er å først approksimere $p(x)$ med et andregradspolynom, for så å finne nullpunkt til dette med andregradsformelen. Finn denne approksimasjonen til s når andregradspolynomet konstrueres ved å interpolere $p(x)$ i $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$.

2] Løs systemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 9x_2 &= 41 \\ 3x_1 - 5x_2 &= -31, \end{aligned}$$

ved hjelp av Doolittles metode. Vis LU -faktoriseringen.

Fasit: $x_1 = -2$, $x_2 = 5$.

3] Løs systemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 36, \end{aligned}$$

ved hjelp av Doolittles metode. Vis LU -faktoriseringen.

Fasit: $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = -8$.

4 Løs systemet

$$\begin{aligned} 0,04x_1 &+ 0,12x_3 = 1,4 \\ 0,64x_2 + 0,32x_3 &= 1,6 \\ 0,12x_1 + 0,32x_2 + 0,56x_3 &= 5,4, \end{aligned}$$

ved hjelp av Choleskys metode. Vis LL^T -faktoriseringen.

Fasit: $x_1 = 5,0$, $x_2 = -2,5$, $x_3 = 10,0$.

5 Utfør 5 Gauss–Seidel iterasjoner på systemet

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 21 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= -45 \\ -x_2 + 4x_3 &= 33, \end{aligned}$$

med $\mathbf{x}_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$, der vi regner med 6S.

Fasit: $x_1^{(5)} = 2,99969$, $x_2^{(5)} = -9,00015$, $x_3^{(5)} = 5,99996$.

6 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & -2 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

regn ut

$$(1) \quad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{jk}^2}, \quad (\text{Frobenius-normen})$$

$$(2) \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq k \leq 3} \sum_{j=1}^3 |a_{jk}|, \quad (\text{søylenormen})$$

$$(3) \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{k=1}^3 |a_{jk}|. \quad (\text{radnormen})$$

Fasit: $\|A\|_F \approx 13,89$, $\|A\|_1 = 12$, $\|A\|_\infty = 12$.