Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 9

$\boxed{1}$ **a)** Innsatt for $u(x,y) = F(x)G(y)$ i $u_{xx} + u_{yy} = 0$, får vi at

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0, \quad \text{det vil si} \quad \underbrace{\frac{F''(x)}{F(x)}}_{k} = \underbrace{-\frac{G''(y)}{G(y)}}_{k}.$$

Altså har vi to ordinære differensialligninger

$$F''(x) - kF(x) = 0, \quad \text{og} \quad G''(y) + kG(y) = 0.$$

Randbetingelsene $u_x(0,y) = u_x(a,y) = 0$ gir at

$$k = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Dette gir at $F(x) = F_n(x) = \tilde{A}_n \cos\frac{n\pi x}{a}$. Videre, har vi at

$$G''(y) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G(y) = 0,$$

slik at $G(y) = G_n(y) = C_n e^{n\pi y/a} + D_n e^{-n\pi y/a}$. Fra randbetingelsen $u(x,0) = 0$ får vi at $C_n = -D_n$ slik at

$$G_n(y) = C_n \underbrace{\left(e^{n\pi y/a} - e^{-n\pi y/a}\right)}_{\sinh\frac{n\pi y}{a}} = 2C_n \sinh\frac{n\pi y}{a}, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

Den generelle løsningen er så gitt ved

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a},$$

der $A_n^* = 2\tilde{A}_n C_n$.

b) Ettersom

$$\begin{aligned} u(x,b) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi b}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sinh\frac{n\pi b}{a} \cos\frac{n\pi x}{a} \\ &= A_1^* \sinh\frac{\pi b}{a}\cos\frac{\pi x}{a} + A_2^* \sinh\frac{2\pi b}{a}\cos\frac{2\pi x}{a} + A_3^* \sinh\frac{3\pi b}{a}\cos\frac{3\pi x}{a} + \cdots \\ &= \cos\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}, \end{aligned}$$

så har vi at

$$A_1^* = \frac{1}{\sinh\frac{\pi b}{a}}, \quad A_2^* = \frac{1}{\sinh\frac{2\pi b}{a}}, \quad \text{og} \quad A_n^* = 0 \quad \text{for} \quad n = 3,4,5,\dots$$

Løsningen til Laplace-ligningen som tilfredstiller de fire gitte randbetingelsene, er altså gitt ved

$$u(x,y) = \frac{1}{\sinh\frac{\pi b}{a}} \cos\frac{\pi x}{a} \sinh\frac{\pi y}{a} + \frac{1}{\sinh\frac{2\pi b}{a}} \cos\frac{2\pi x}{a} \sinh\frac{2\pi y}{a}.$$

$\boxed{2}$ Den Fourier-transformasjonen til $u(x,t)$, med hensyn på x, er gitt ved

$$\hat{u}(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-iwx}\, \mathrm{d}x.$$

Fourier-transformerer så den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

med hensyn på x. Det gir ligningen

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -w^2 t\hat{u}, \qquad \hat{u} = \hat{u}(w,t).$$

Fiksér så w, slik at vi får en ordinær differensialligning

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} = -w^2 t\hat{u},$$

som har løsning

$$\hat{u}(w,t) = C(w)e^{-\frac{1}{2}w^2t^2}.$$

Initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$, gir så at

$$\hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)e^{-\frac{1}{2}w^2t^2}, \qquad \hat{f}(w) = \mathscr{F}\{f(x)\}.$$

Inverstransformen gir så at

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-\frac{1}{2}w^2t^2}e^{iwx}\, \mathrm{d}w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iwv}\, \mathrm{d}v}_{\hat{f}(w)} \Bigg] e^{-\frac{1}{2}w^2t^2}e^{iwx}\, \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2t^2}e^{iw(x-v)}\, \mathrm{d}w}_{\frac{\sqrt{2\pi}}{t}e^{-\frac{(x-v)^2}{2t^2}}} \mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-\frac{(x-v)^2}{2t^2}}\, \mathrm{d}v,
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\mathscr{F}\{e^{-a\xi^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}$ innsatt for $a = \frac{1}{2t^2}$ og $\xi = x - v$, for å vise at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2t^2}e^{iw(x-v)}\, \mathrm{d}w = \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}w^2t^2}e^{iw(x-v)}\, \mathrm{d}w = \frac{\sqrt{2\pi}}{t}e^{-\frac{(x-v)^2}{2t^2}}.$$

Vi ønsker å skrive løsningen på formen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - st)g(s)\, \mathrm{d}s.$$

La så $v = x - st$, slik at

$$s = \frac{x - v}{t},$$

som gir at $\mathrm{d}s = -\frac{1}{t}\mathrm{d}v$. Merk også at integrasjonsgrensene bytter plass, det vil si

$$s \xrightarrow[v \to \infty]{} -\infty, \quad \text{og} \quad s \xrightarrow[v \to -\infty]{} \infty.$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} t} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{2t^2}} \, \mathrm{d}v = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(x - st) e^{-\frac{1}{2}s^2} \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - st) e^{-\frac{1}{2}s^2} \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Det gir at $g(s) = e^{-\frac{1}{2}s^2}$.

3 Vi skal finne røttene til $x^2 - 20x + 1 = 0$ ved å benytte (6) og (7) i avsnitt 19.1 i boken, der vi regner med 6S (seks signifikante siffer) i alle mellomregninger.

Ved å bruke (6) (og regne med 6S) får vi at

$$x_1 = \frac{1}{2}(20 + \sqrt{400 - 4}) = \frac{1}{2}(20 + \sqrt{396}) = 19{,}9499,$$

og at

$$x_2 = \frac{1}{2}(20 - \sqrt{400 - 4}) = \frac{1}{2}(20 - \sqrt{396}) = 0{,}0501.$$

Ved å bruke (7) (og regne med 6S) får vi at $x_1 = 19{,}9499$ og at

$$x_2 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{19{,}9499} = 0{,}0501256.$$

Altså ser vi at (7) gir et bedre resultat enn (6).

4 Vi benytter samme notasjonen som i beviset for teorem 1 i avsnitt 19.1, det vil si $x = \tilde{x} + \epsilon_1$, $y = \tilde{y} + \epsilon_2$, $|\epsilon_1| \leq \beta_1$ og $|\epsilon_2| \leq \beta_2$. Da er feilen, ϵ, til addisjonen av x og y gitt ved

$$\begin{aligned} |\epsilon| &= |x + y - (\tilde{x} + \tilde{y})| \\ &= |x - \tilde{x} + y - \tilde{y}| \\ &= |\epsilon_1 + \epsilon_2| \leq |\epsilon_1| + |\epsilon_2| \leq \beta_1 + \beta_2. \end{aligned}$$

Altså er feilen begrenset ved summen av feilen for hvert ledd.

5 Vi har at $f(x) = x^4 - x + 0{,}2 = 0$, det vil si

$$x^4 = x - 0{,}2 \qquad \text{slik at} \qquad x = \sqrt[4]{x - 0{,}2}.$$

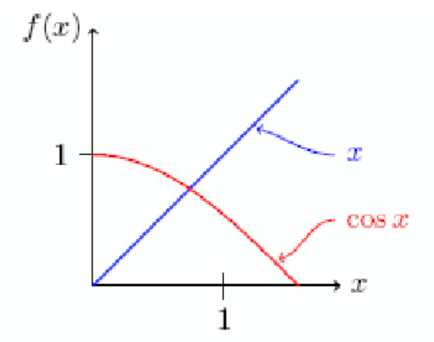
La så $g(x) = \sqrt[4]{x - 0{,}2}$. Da er teorem 1, side 789 i boken, tilfredstilt. Ser så på

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[4]{x_n - 0{,}2}.$$

Det gir følgende tabell:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	1	0,9457	0,9293	0,9241	0,9225	0,9220	0,9218	0,9217	0,9217

$\boxed{6}$ Vi tegner først grafen til x og $\cos x$ i samme koordinatsystem.



La så $f(x) = x - \cos x$, slik at $f'(x) = 1 + \sin x$. Newtons metode gir så at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}.$$

La så $x_0 = 1$. Det gir følgende tabell:

n	0	1	2	3	4
x_n	1	0,750364	0,739113	0,739085	0,739085

$\boxed{7}$ Vi har at $f(x) = e^{-x} - \tan x$. Sekantmetoden gir så at

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= x_n - (e^{-x_n} - \tan x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{e^{-x_n} - \tan x_n - (e^{-x_{n-1}} - \tan x_{n-1})}. \end{aligned}$$

La så $x_0 = 1$ og $x_1 = 0{,}7$. Det gir følgende tabell:

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	1	0,7	0,577094	0,534162	0,531426	0,531391	0,531391