Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4135 Matematikk 4D
Høst 2011

Løsningsforslag — Øving 8

$\boxed{1}$ **a)** Setter vi $u(x,t) = F(x)G(t)$ inn i differensialligningen

$$u_{tt} + u_t = u_{xx}, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

får vi at

$$F(x)\ddot{G}(t) + F(x)\dot{G}(t) = F''(x)G(t),$$

det vil si

$$\underbrace{\frac{\ddot{G}(t) + \dot{G}(t)}{G(t)}}_{k} = \underbrace{\frac{F''(x)}{F(x)}}_{k}.$$

Dermed har vi fått to ordinære differensialligninger

$$F''(x) - kF(x) = 0 \qquad \text{og} \qquad \ddot{G}(t) + \dot{G}(t) - kG(t) = 0.$$

Randbetingelsene,

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{2}$$

gir at $F(x) = 0$ for $k \ge 0$. La så $k = -p^2$. Det gir at

$$F''(x) + p^2F(x) = 0.$$

Den tilhørende karakteristiske ligningen er så $\lambda^2 + p^2 = 0$, som har løsning $\lambda = \pm ip$. Altså har vi at

$$F(x) = A\cos px + B\sin px.$$

Fra kravet om at $u(0,t) = 0$ får vi at $A = 0$. Den andre randbetingelsen, $u(\pi,t) = 0$ gir at

$$B\sin p\pi = 0.$$

Altså er enten $B = 0$ eller $\sin p\pi = 0$. Da $B = 0$ gir kun den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$ ser vi på $\sin p\pi = 0$. Dermed har vi at

$$p\pi = n\pi \qquad \text{det vil si} \qquad p = n = 1, 2, 3, \dots,$$

slik at $k = -p^2 = -n^2$ og $F(x) = F_n(x) = \tilde{B}_n \sin nx$.
Den andre ordinære differensialligningen, $\ddot{G}(t) + \dot{G}(t) - kG(t) = 0$, blir dermed

$$\ddot{G}(t) + \dot{G}(t) + n^2G(t) = 0.$$

Den tilhørende karakteristiske ligningen $\lambda^2 + \lambda + n^2 = 0$ har så løsning $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$. Altså har vi at

$$G(t) = G_n(t) = \left(C_n \cos t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} + D_n \sin t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\right)e^{-\frac{t}{2}}.$$

Dette gir at den generelle løsningen til (1) som tilfredstiller (2), er gitt ved

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)G_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n \cos t\sqrt{n^2-\frac{1}{4}} + B_n^* \sin t\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}\right)e^{-\frac{t}{2}} \sin nx, \end{aligned}$$

der $B_n = \tilde{B}_n C_n$ og $B_n^* = \tilde{B}_n D_n$.

b) Vi er interessert i den løsningen vi fant i **a)** som også tilfredstiller initialbetingelsene

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{og} \qquad u_t(x,0) = \sin 4x.$$

Den første initialbetingelsen, $u(x,0) = 0$ gir at

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx = 0,$$

slik at $B_n = 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ Altså har vi at

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* e^{-\frac{t}{2}} \sin t\sqrt{n^2-\frac{1}{4}} \sin nx,$$

slik at

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \sin t\sqrt{n^2-\frac{1}{4}} \sin nx + \sqrt{n^2-\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}} \cos t\sqrt{n^2-\frac{1}{4}} \sin nx\right).$$

Dermed får vi fra den andre initialbetingelsen, $u_t(x,0) = \sin 4x$, at

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \sqrt{n^2-\frac{1}{4}} \sin nx \\ &= B_1^* \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + B_2^* \frac{\sqrt{7}}{2} \sin 2x + B_3^* \frac{\sqrt{35}}{2} \sin 3x + B_4^* \frac{3\sqrt{7}}{2} \sin 4x \\ &\quad + B_5^* \frac{3\sqrt{11}}{2} \sin 5x + \cdots \\ &= \sin 4x. \end{aligned}$$

Det vil si, $B_4^* = \frac{2}{3\sqrt{7}}$ og $B_n^* = 0$ for $n \neq 4$.

Altså har vi at løsningen til (1), som tilfredstiller (2), initialbetingelsene $u(x,0) = 0$ og $u_t(x,0) = \sin 4x$ er gitt ved

$$u(x,t) = \frac{2}{3\sqrt{7}} e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{3\sqrt{7}}{2}t \ \sin 4x.$$

$\boxed{2}$ Randbetingelsen $u(0,t) = 0$ gir ved d'Alemberts løsning at

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\big[f(ct) + f(-ct)\big] = 0 \qquad \text{slik at} \qquad f(-ct) = -f(ct).$$

Altså er $f(x)$ en odde funksjon. Fra den andre randbetingelsen $u(L,t)=0$ får vi at

$$\begin{aligned} u(L,t) &= \frac{1}{2}\big[f(L+ct)+f(L-ct)\big] = \frac{1}{2}\big[f(ct+L)+f\big(-(ct-L)\big)\big] \\ &= \frac{1}{2}\big[f(ct+L)-f(ct-L)\big] = 0, \end{aligned}$$

slik at $f(ct+L)=f(ct-L)$. Altså har $f(x)$ periode $2L$.

$\boxed{3}$ Fra side 554 i boken, har vi at den generelle løsningen til diffusjonsligningen (med $L=\pi$) er gitt ved

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \; e^{-n^2c^2t}$$

der

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \; \mathrm{d}x.$$

I vårt tilfelle er

$$f(x)=\begin{cases} U_0 & \text{for } 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{for } \frac{\pi}{2}<x<\pi, \end{cases}$$

der U_0 er en konstant forskjellig fra 0. Altså har vi at

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \; \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} U_0 \sin nx \; \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{U_0}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2U_0}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4U_0}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{4} \qquad n=1,2,3,\dots, \end{aligned}$$

der vi har benyttet at $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$.

Altså har vi at

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \; e^{-n^2c^2t} = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^2\frac{n\pi}{4}\;\sin nx \; e^{-n^2c^2t} \\ &= \frac{4U_0}{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin x \; e^{-c^2t}+\frac{1}{2}\sin 2x \; e^{-4c^2t}+\frac{1}{6}\sin 3x \; e^{-9c^2t}+\frac{1}{10}\sin 5x \; e^{-25c^2t}+\cdots\right). \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ **a)** Setter vi $u(x,t)=F(x)G(t)$ inn i differensialligningen

$$u_t=4u_{xx}, \quad 0<x<1, \quad t>0, \tag{3}$$

får vi at

$$F(x)\dot{G}(t)=4F''(x)G(t),$$

det vil si

$$\underbrace{\frac{\dot{G}(t)}{4G(t)}}_{k}=\underbrace{\frac{F''(x)}{F(x)}}_{k}.$$

Dermed har vi fått to ordinære differensialliginger

$$F''(x)-kF(x)=0 \qquad \text{og} \qquad \dot{G}(t)-4kG(t)=0.$$

Randbetingelsene,

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

gir at $F(x) = 0$ for $k \geq 0$. La så $k = -p^2$. Det gir at

$$F''(x) + p^2 F(x) = 0.$$

Den tilhørende karakteristiske ligningen er så $\lambda^2 + p^2 = 0$, som har løsning $\lambda = \pm ip$. Altså har vi at

$$F(x) = A\cos px + B\sin px.$$

Fra kravet om at $u(0,t) = 0$ får vi at $A = 0$. Den andre randbetingelsen, $u(1,t) = 0$ gir at

$$B\sin p = 0.$$

Altså er enten $B = 0$ eller $\sin p = 0$. Da $B = 0$ gir kun den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$ ser vi på $\sin p = 0$. Dermed har vi at

$$p = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

slik at $k = -p^2 = -n^2\pi^2$ og $F(x) = F_n(x) = \tilde{B}_n \sin n\pi x$.
Den andre ordinære differensialligningen, $\dot{G}(t) - 4kG(t) = 0$, blir dermed

$$\dot{G}(t) + 4n^2\pi^2 G(t) = 0.$$

Dette er en separabel 1. ordens ordinær differensialligning, der

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = -4n^2\pi^2 G(t), \quad \text{slik at} \quad \frac{\mathrm{d}G}{G} = -4n^2\pi^2 \mathrm{d}t.$$

Integerer vi opp begge sider får vi at

$$\ln G(t) = -4n^2\pi^2 t + \tilde{C}_n \quad \text{som gir at} \quad G(t) = G_n(t) = C_n e^{-4n^2\pi^2 t},$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$, der $C_n = e^{\tilde{C}_n}$.
Dette gir at den generelle løsningen til (3) som tilfredstiller (4), er gitt ved

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)G_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x \; e^{-4n^2\pi^2 t}, \end{aligned}$$

der $B_n = \tilde{B}_n C_n$.

b) Vi er interessert i den løsningen vi fant i **a)** som også tilfredstiller initialbetingelsen

$$u(x,0) = \sin \pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x. \tag{5}$$

Vi har at

$$\begin{aligned} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x &= B_1 \sin \pi x + B_2 \sin 2\pi x + B_3 \sin 3\pi x + B_4 \sin 4\pi x + \cdots \\ &= \sin \pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x, \end{aligned}$$

slik at $B_1 = 1$, $B_3 = \frac{1}{3}$ og $B_n = 0$ for $n \neq 1, 3$.
Altså har vi at løsningen til (3) som tilfredstiller (4) og (5), er gitt ved

$$u(x,t) = \sin \pi x \; e^{-4\pi^2 t} + \frac{1}{3} \sin 3\pi x \; e^{-36\pi^2 t}.$$

$\boxed{5}$ Ettersom $f(x) = e^{-k|x|}$ er jevn funksjon, er Fourier-integralet til $f(x)$ et Fourier-cosinusintegral ($B(p) = 0$). Det vil si,

$$f(x) = \int_0^\infty A(p) \cos px \; \mathrm{d}p, \quad \text{der} \quad A(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos px \; \mathrm{d}x.$$

Dette gir at

$$\begin{aligned} A(p) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos px \; \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-kx} \cos px \; \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-kx}}{k^2 + p^2} (-k \cos px + p \sin px) \right]_0^\infty \quad \text{(fra Rottmann formel 133), side 144)} \\ &= \frac{2k}{\pi} \frac{1}{p^2 + k^2}. \qquad \text{(bruker at } k > 0\text{)} \end{aligned}$$

Altså har vi at

$$u(x,t) = \int_0^\infty \big[A(p) \cos px + B(p) \sin px \big] e^{-c^2 p^2 t} \; \mathrm{d}p = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos px}{p^2 + k^2} e^{-c^2 p^2 t} \; \mathrm{d}p.$$