1 Ettersom $\int_0^t (t-\tau)y(\tau)\ \mathrm{d}\tau = t * y(t)$, kan integralligningen skrives på formen

$$y(t) = 1 - t * y(t), \qquad t > 0. \tag{$*$}$$

La så $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$. Laplace-transformerer så den nye formen av integralligningen:

$$Y = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}Y,$$

som igjen gir at

$$Y = \frac{s}{s^2+1}.$$

Ved å ta inverstransformen får vi så at

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \cos t.$$

2 **a)** Fourier-sinusrekken til $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x,$$

der

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\ \mathrm{d}x \\
&= 2\Bigg(\underbrace{\Big[-\frac{1}{n\pi}x(1-x)\cos n\pi x\Big]_0^1}_{=0} + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos n\pi x\ \mathrm{d}x\Bigg) \\
& \hspace{20em} \text{(delvis integrasjon)} \\
&= \frac{2}{n\pi}\Bigg(\underbrace{\Big[\frac{1}{n\pi}(1-2x)\sin n\pi x\Big]_0^1}_{=0,\ \text{da}\ \sin n\pi = 0} + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\ \mathrm{d}x\Bigg) \quad \text{(delvis integrasjon)} \\
&= \frac{4}{(n\pi)^2}\Big[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi\Big]_0^1 = \frac{4}{(n\pi)^3}\big(1-(-1)^n\big), \qquad n = 1,2,3,\ldots
\end{aligned}$$

Det vil si, Fourier-sinusrekken til $f(x)$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x = \frac{4}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\sin k\pi x = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)^3} \\
&= \frac{8}{\pi^3}\Big(\sin\pi x + \frac{\sin 3\pi x}{3^3} + \frac{\sin 5\pi x}{5^3} + \cdots\Big).
\end{aligned}$$

b) For å bestemme summen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3} = 1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots$$

bruker vi Fourier-sinusrekken til $f(x)$ som vi fant i oppgave **a)**.
Ved å la $x=\frac{1}{2}$ ser vi at

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}}{(2n-1)^3}=\frac{8}{\pi^3}\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots\right),$$

slik at

$$\frac{\pi^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

3 Gitt en funksjon $f(x)$ (som er $2L$-periodisk) så er dens komplekse Fourier-rekke gitt ved

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\pi x/L},$$

der

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x.$$

Fra dette følger det at

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n),$$

der a_n og b_n er (de reelle) Fourier-koeffisientene til Fourier-rekken til $f(x)$.
For en jevn funksjon er $b_n=0$ for alle n. Altså har vi at

$$c_n=\frac{1}{2}a_n\in\mathbb{R}.$$

For en odde funksjon er $a_n=0$ for alle n. Altså har vi at

$$c_n=-\frac{1}{2}ib_n\in i\,\mathbb{R}.$$

4 De komplekse Fourier-koeffisientene til $f(x)=x^2$ for $-\pi<x<\pi$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{i}{n}x^2e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{2i}{n}\int_{-\pi}^{\pi}xe^{-inx}\mathrm{d}x\right) && \text{(delvis integrasjon)}\\
&= \frac{i\pi}{2n}(\underbrace{e^{-in\pi}-e^{in\pi}}_{-2i\sin n\pi=0})-\frac{i}{n\pi}\left(\left[\frac{i}{n}xe^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{i}{n}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}\mathrm{d}x\right) && \text{(delvis integrasjon)}\\
&= \frac{1}{n^2}(\underbrace{e^{-in\pi}+e^{in\pi}}_{2\cos n\pi=2\cdot(-1)^n})-\frac{1}{n^2\pi}\left[\frac{i}{n}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{2}{n^2}(-1)^n-\frac{i}{n^3\pi}(\underbrace{e^{-in\pi}-e^{in\pi}}_{-2i\sin n\pi=0})=\frac{2}{n^2}(-1)^n,
\end{aligned}$$

der $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ For $n = 0$ har vi at

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6\pi}\big[x^3\big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Altså er den komplekse Fourier-rekken til $f(x)$ gitt ved

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx}.$$

$\boxed{5}$ I oppgave 4 fant vi at den komplekse Fourier-rekken til $f(x) = x^2$ for $-\pi < x < \pi$ er gitt ved

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx}.$$

Den reelle Fourier-rekken er så gitt ved en Fourier-cosinusrekke ettersom $f(x)$ er en jevn funksjon, det vil si

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx} = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \cdots\right). \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Teorem 1 i delkapittel 11.4 i 10th ed (11.6 i 9th ed), gir at feilen

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - F(x)\big)^2\ \mathrm{d}x,$$

er *minst* når

$$F(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{N}(A_k \cos kx + B_k \sin kx) = a_0 + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

altså når koeffisientene i det trigonometriske polynomet $F(x)$ er lik Fourier-koeffisientene. Gitt funksjonen $f(x) = e^{-|x|}$ for $-\pi < x < \pi$, så er Fourier-koeffisientene gitt ved

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(1 - e^{-\pi}), \quad && (f(x) \text{ er en jevn funksjon}) \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\cos nx\ \mathrm{d}x && (f(x) \text{ er en jevn funksjon}) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2+1}e^{-x}(n\sin nx - \cos nx)\right]_0^{\pi} && \text{(fra Rottmann formel 133) side 144)} \\ &= \frac{2}{\pi(n^2+1)}\big(1 - (-1)^n e^{-\pi}\big), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathrm{d}x = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots && (f(x) \text{ er en jevn funksjon}) \end{aligned}$$

Altså har vi at

$$
\begin{aligned}
F(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx \\
&= \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{k^2+1} \cos kx \\
&= \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-e^{-\pi}}{2} \cos x + \frac{1+e^{-\pi}}{2^2+1} \cos 2x + \frac{1-e^{-\pi}}{3^2+1} \cos 3x + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

gir minst feil E.

Gitt $F(x)$ som over, så kan feilen E skrives på formen

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, \mathrm{d}x - \pi \left[2a_0^2 + \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \right] \\
&= 2 \int_0^{\pi} e^{-2x} \, \mathrm{d}x - \left[\frac{2}{\pi}(1-e^{-\pi})^2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{k^2+1} \right)^2 \right] \\
&= 1 - e^{-2\pi} - \left[\frac{2}{\pi}(1-e^{-\pi})^2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{k^2+1} \right)^2 \right].
\end{aligned}
$$

Dette gir følgende tabell for $N = 1, 2, \ldots, 5$.

N	1	2	3	4	5
E	0,06893	0,02231	0,00845	0,00442	0,00237