Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet Institutt for matematiske fag	TMA4135 Matematikk 4D Høst 2011 **Løsningsforslag — Øving 4**

1 **a)** Funksjonen $f(t)$ kan skrives, ved hjelp av sprangfunksjoner, på formen

$$f(t) = (t-1)^2 u(t-1).$$

Andre forskyvningsteorem (forskyning langs t-aksen), side 235 i boken gir så at

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = e^{-s}\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}e^{-s}.$$

Da $g(t) = \int_0^t f(\tau)\, \mathrm{d}\tau$ har vi at

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s^4}e^{-s}.$$

b) La $X_1 = \mathscr{L}\{x_1(t)\}$ og $X_2 = \mathscr{L}\{x_2(t)\}$. Dette gir at $\mathscr{L}\{x_1'\} = sX_1 - x_1(0) = sX_1$ og at $\mathscr{L}\{x_2'\} = sX_2 - x_2(0) = sX_2 - 1$. Det transformerte ligningssystemet er så gitt ved

$$sX_1 + X_2 = \frac{2}{s^3}e^{-s}, \tag{1}$$

$$X_1 - sX_2 = \frac{2}{s^4}e^{-s} - 1. \tag{2}$$

Fra (2) får vi at $X_1 = sX_2 + \frac{2}{s^4}e^{-s} - 1$. Innsatt i (1) gir dette at

$$(s^2+1)X_2 = s, \quad \text{det vil si} \quad X_2 = \frac{s}{s^2+1}.$$

Altså er

$$X_1 = \frac{s^2}{s^2+1} + \frac{2}{s^4}e^{-s} - 1 = \frac{2}{s^4}e^{-s} - \frac{1}{s^2+1}.$$

Ved å ta inverstransformen får vi så at

$$x_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X_1\} = \frac{1}{3}(t-1)^3 u(t-1) - \sin t, \quad \text{og} \quad x_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X_2\} = \cos t.$$

2 Ettersom

$$f(-x) = \pi - |-x| = \pi - |x| = f(x),$$

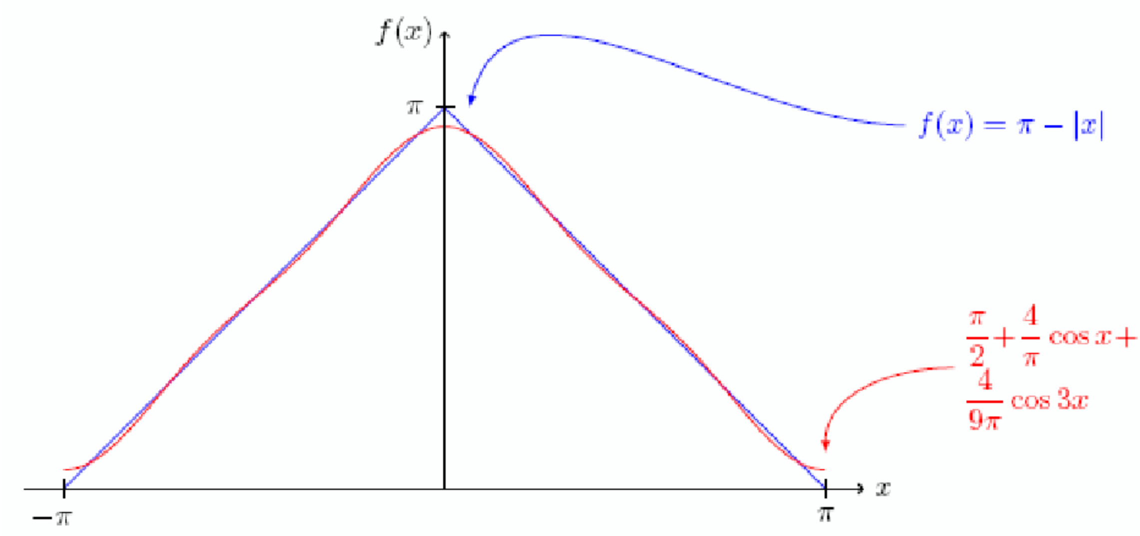
har vi at $f(x)$ er en jevn funksjon. Fourier-rekken til $f(x)$ blir da gitt ved en Fourier-cosinusrekke der Fourier-koeffisientene er gitt ved

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos nx\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n\pi}\left\{\left[(\pi - x)\sin nx\right]_0^\pi + \int_0^\pi \sin nx\, \mathrm{d}x\right\} = \frac{2}{n\pi}\left\{0 - \frac{1}{n}\left[\cos nx\right]_0^\pi\right\} \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left(1 - (-1)^n\right).
\end{aligned}$$

For alle naturlige tall m gjelder det at $a_{2m-1} = \frac{4}{(2m-1)^2\pi}$, og at $a_{2m} = 0$. Fourier-rekken til $f(x)$ er så gitt ved

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx &= \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)^2\pi} \cos(2m-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x + \frac{4}{9\pi}\cos 3x + \cdots . \end{aligned}$$

Grafen til $f(x)$ samt summen av de tre første leddene i Fourier-rekken til $f(x)$ er gitt under.



Merk at for $g(y) = 1 - |y|$ (samme funksjon som i oppgave 11.2.8), så er $f(x) = \pi g\left(\frac{x}{\pi}\right)$ slik at Fourier-rekken til $f(x)$ kan uttrykkes ved hjelp av Fourier-rekken til $g(x)$, der

$$f(x) = \pi g\left(\frac{x}{\pi}\right) = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos\pi\frac{x}{\pi} + \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi\frac{x}{\pi} + \cdots\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x + \frac{4}{9\pi}\cos 3x + \cdots .$$

$\boxed{3}$ Fra definisjonen av $f(x)$ ser vi at vi kan skrive $f(x) = \pi e^{|x|}$. Ettersom

$$f(-x) = \pi e^{|-x|} = \pi e^{|x|} = f(x),$$

er $f(x)$ en jevn funksjon. Fourier-rekken til $f(x)$ blir da gitt ved en Fourier-cosinusrekke, der Fourier-koeffisientene er gitt ved

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} e^x\ \mathrm{d}x = e^{\pi} - 1, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} e^x \cos nx\ \mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{e^x}{1+n^2}(\cos nx + n\sin nx)\right]_0^{\pi} \qquad \text{(fra Rottmann, formel 133) side 144)} \\ &= \frac{2}{1+n^2}\big((-1)^n e^{\pi} - 1\big). \end{aligned}$$

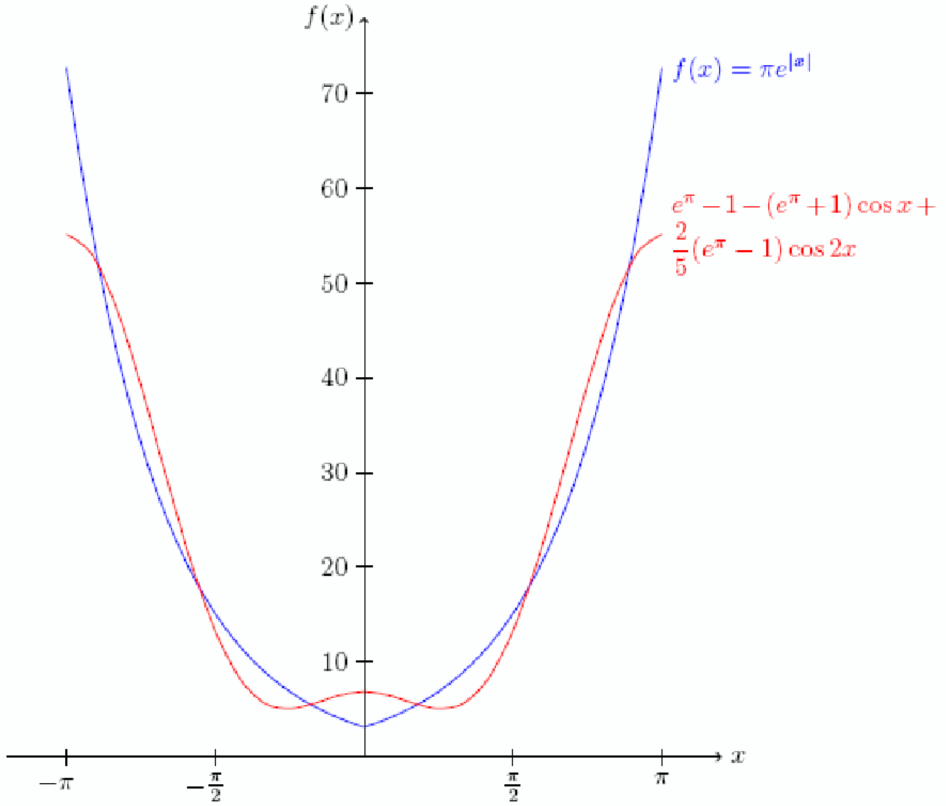
For alle naturlige tall m gjelder det at

$$a_{2m-1} = -\frac{2}{1+(2m-1)^2}(e^\pi + 1), \quad \text{og at} \quad a_{2m} = \frac{2}{1+4m^2}(e^\pi - 1).$$

Fourier-rekken til $f(x)$ er så gitt ved

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = e^\pi - 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{2(e^\pi+1)}{1+(2m-1)^2}\cos(2m-1)x + \frac{2(e^\pi-1)}{1+4m^2}\cos 2mx\right) \\ &= e^\pi - 1 - (e^\pi+1)\cos x + \frac{2}{5}(e^\pi - 1)\cos 2x + \cdots . \end{aligned}$$

Grafen til $f(x)$ samt summen av de tre første leddene i Fourier-rekken til $f(x)$ er gitt under.



$\boxed{4}$ Formel (4) i delkapittel 9.6 i boken gir at

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{y}{x^2}g'(t) + \frac{1}{x}h'(t) \\ &= -\frac{h(t)}{g(t)^2}g'(t) + \frac{h'(t)}{g(t)} = \frac{h'(t)g(t) - g'(t)h(t)}{g(t)^2}. \end{aligned}$$

(Innsat for $x = g(t)$ og $y = h(t)$ gir at $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{h}{g}\right) = \frac{h'g - g'h}{g^2}$.)

$\boxed{5}$ Formel (2) i delkapittel 9.6 i boken gir at

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 8x \cdot 1 - 8y \cdot 2 \\ &= 8(u+2v) - 16(2u-v) = -24u + 32v,\end{aligned} \quad \text{og} \quad \begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 8x \cdot 2 - 8y \cdot (-1) \\ &= 16(u+2v) + 8(2u-v) = 32u + 24v.\end{aligned}$$

(Innsatt for $x = u + 2v$ og $y = 2u - v$ gir at $w = 4x^2 - 4y^2 = -12u^2 + 32uv + 12v^2$. Ved å ta den partiellderiverte av dette uttrykket med hensyn på u og v får vi som over.)

$\boxed{6}$ Gradienten til f er gitt ved

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{z} = 2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (2x, 2y, 2z),$$

slik at $\nabla f|_P = (4, -4, 2)$. Den retningsderiverte til f i punktet P i retningen til vektoren $\mathbf{a}$ er så gitt ved

$$D_{\mathbf{a}} f = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} \bullet \nabla f|_P = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0) \cdot (4, -4, 2) = 0.$$

$\boxed{7}$ Gradienten til f er gitt ved

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} = (yz, xz, xy),$$

slik at $\nabla f|_P = (3, -3, -1)$. Den retningsderiverte til f i punktet P i retningen til vektoren $\mathbf{a}$ er så gitt ved

$$D_{\mathbf{a}} f = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} \bullet \nabla f|_P = \frac{1}{3}(1, -2, 2) \bullet (3, -3, -1) = \frac{7}{3}.$$

$\boxed{8}$ Gradienten til f er gitt ved

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= 2yz\big((x+1)e^x + e^y - e^z\big)\mathbf{i} + 2xz\big(e^x + (y+1)e^y - e^z\big)\mathbf{j} + 2xy\big(e^x + e^y - (z+1)e^z\big)\mathbf{k} \\ &= \big(2yz\big[(x+1)e^x + e^y - e^z\big], 2xz\big[e^x + (y+1)e^y - e^z\big], 2xy\big[e^x + e^y - (z+1)e^z\big]\big),\end{aligned}$$

slik at $\nabla f|_P = (4e, 2e^{-1} - 2e, -2e - 2e^{-1})$.

La $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Fra $\mathbf{v} \bullet \mathbf{a} = 0$ får vi at

$$v_1 + v_3 = 0, \quad \text{det vil si} \quad v_3 = -v_1.$$

Altså er $\mathbf{v} = (v_1, v_2, -v_1)$. Fra $\mathbf{v} \bullet \mathbf{b} = 0$ får vi at

$$v_2 + v_1 = 0, \quad \text{det vil si} \quad v_2 = -v_1.$$

Altså er $\mathbf{v} = (v_1, -v_1, -v_1)$. Da $\mathbf{v}$ er oppgitt til å ha negativ $\mathbf{k}$-komponent må vi ha $v_1 > 0$. La så $v_1 = 1$, slik at $\mathbf{v} = (1, -1, -1)$.

Den retningsderiverte til f i punktet P i retningen til vektoren $\mathbf{v}$ er så gitt ved

$$D_{\mathbf{v}}\, \nabla f|_P = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \bullet \nabla f|_P = \frac{8e}{\sqrt{3}}.$$