



- 1 a) Vi innfører nye variabler  $y_1 = y$  og  $y_2 = y'$ , og får differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= (1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{aligned} \quad \text{med initialbetingelser} \quad \begin{aligned} y_1(0) &= 2 \\ y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

- b) For differensialligningssystemet i oppgave a) blir «baklengs Euler» gitt ved

$$\mathbf{y}'_{n+1} = \begin{bmatrix} y_{1,n+1} \\ y_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_{2,n} \\ (1 - y_{1,n+1}^2)y_{2,n+1} - y_{1,n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}).$$

Med  $n = 0$ ,  $h = 0,1$  og initialbetingelsene  $y_{1,0} = 2$  og  $y_{2,0} = 0$  får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= 2 + 0,1y_{2,1} \\ y_{2,1} &= 0,1[(1 - y_{1,1}^2)y_{2,1} - y_{1,1}]. \end{aligned}$$

Multipliserer vi begge ligningene med 10, kan ligningssystemet skrives

$$\begin{aligned} 10y_{1,1} - y_{2,1} - 20 &= 0 \\ y_{1,1} + (9 + y_{1,1}^2)y_{2,1} &= 0. \end{aligned}$$

- c) Ligningssystemet

$$\begin{aligned} 10y_1 - y_2 - 20 &= 0 \\ y_1 + (9 + y_1^2)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

har Jakobi-matrise

$$J(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 + 2y_1y_2 & 9 + y_1^2 \end{bmatrix}.$$

Vi lar nå  $y_i^{(n)}$  være den numeriske løsningen av  $y_i$  etter  $n$  iterasjoner med Newtons metode, der  $i = 1, 2$ . For å finne

$$y_1^{(1)} = y_1^{(0)} + \Delta y_1^{(0)} \quad \text{og} \quad y_2^{(1)} = y_2^{(0)} + \Delta y_2^{(0)},$$

løser vi ligningen

$$J(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}) \begin{bmatrix} \Delta y_1^{(0)} \\ \Delta y_2^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10y_1^{(0)} - y_2^{(0)} - 20 \\ y_1^{(0)} + (9 + (y_1^{(0)})^2)y_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

med hensyn på  $(\Delta y_1^{(0)}, \Delta y_2^{(0)})$ . Med startverdiene  $y_1^{(0)} = 2$  og  $y_2^{(0)} = 0$  får vi

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1^{(0)} \\ \Delta y_2^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

som har løsning  $\Delta y_1^{(0)} = -0,02$  og  $\Delta y_2^{(0)} = -0,15$ .

Dette gir at

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= y_1^{(0)} + \Delta y_1^{(0)} = 1,98 \\ y_2^{(1)} &= y_2^{(0)} + \Delta y_2^{(0)} = -0,15. \end{aligned}$$

**2** a) Vi gjør tilnærmelsene

$$u_{xx}(ih, jh) \approx \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j}}{h^2},$$

og

$$u_{yy}(ih, jh) \approx \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j}}{h^2}.$$

Innsatt i ligningen  $u_{xx} + 2u_{yy} = 0$  gir dette

$$\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j}}{h^2} + 2 \cdot \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j}}{h^2},$$

det vil si,

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + 2U_{i,j+1} + 2U_{i,j-1} - 6U_{i,j} = 0.$$

b) Initialbetingelsene gir at

$$U_{i,0} = U_{0,j} = 0 \quad \text{og at} \quad U_{i,1} = U_{1,j} = 1.$$

Kombinerer vi dette med differanseskjemaet vi fant i a) og setter inn for  $i, j = 1, 2$  får vi ligningene

$$\begin{aligned} -6U_{1,1} + U_{2,1} + 2U_{1,2} &= 0, \\ U_{1,1} - 6U_{2,1} + 2U_{2,2} &= -1, \\ 2U_{1,1} - 6U_{1,2} + U_{2,2} &= -2, \\ 2U_{2,1} + U_{1,2} - 6U_{2,2} &= -3. \end{aligned}$$

En iterasjon med Gauss–Seidel anvendt på dette ligningssystemet, med startvektoren  $\mathbf{U}_0 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ , gir

$$\begin{aligned} U_{1,1}^{(1)} &= -\frac{1}{6} \left( 0 - \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}, \\ U_{2,1}^{(1)} &= -\frac{1}{6} \left( -1 - \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}, \\ U_{1,2}^{(1)} &= -\frac{1}{6} \left( -2 - 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}, \\ U_{2,2}^{(1)} &= -\frac{1}{6} \left( -3 - 2 \cdot \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \right) = \frac{17}{24}. \end{aligned}$$

**3** Vi bruker tilnærmelsene

$$u_{xx}(ih, jh) \approx \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

og

$$u_{yy}(ih, jh) \approx \frac{1}{h^2} (u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}).$$

Dette gir ligningene

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2}(1 - 2u_{11} + u_{21}) + \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{11} + u_{12}) &= -1, \\ \frac{1}{h^2}(u_{11} - 2u_{21} + 1) + \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{21} + 1) &= -1, \\ \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{12} + 1) + \frac{1}{h^2}(u_{11} - 2u_{12} + 1) &= -1.\end{aligned}$$

Setter inn  $h = 1/4$  og får ligningene

$$\begin{aligned}-4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= -\frac{33}{16} \approx -2,0625, \\ u_{11} - 4u_{21} &= -\frac{49}{16} \approx -3,0625, \\ u_{11} - 4u_{12} &= -\frac{49}{16} \approx -3,0625.\end{aligned}$$

Disse har løsning

$$u_{11} = \frac{115}{112} \approx 1,0268, \quad u_{12} = u_{21} = \frac{229}{224} \approx 1,0223.$$

- 4 Velg skritt lengder  $k$  og  $h$  i henholdsvis  $x$  og  $t$ -retningen,  $h$  velger du slik at  $N = 1/h$  blir et heltall. Gridpunktene blir da

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Vi er altså ute etter numeriske approksimasjoner til løsningen i gitterpunktene, det vil si  $U_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$ .

- a) For å konstruere et eksplisitt skjema velger vi et gridpunkt  $x_i, t_j$  og approksimerer  $u_t$  med en foroverdifferanse og  $u_{xx}$  og  $u_x$  med en sentraldifferanse rundt dette gitterpunktet. Det betyr

$$\begin{aligned}u_t(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} \\ u_{xx}(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} \\ u_x(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h}.\end{aligned}$$

La nå  $U_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$ , sett inn i differensialligningen, og vi får

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h}$$

eller

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \frac{k}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + \frac{k}{2h}(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

for  $j = 0, 1, 2, \dots$ , gitt startverdiene  $U_{i,0} = 8x_i(1 - x_i)$  for  $i = 0, 1, \dots, N$  og randverdiene  $U_{0,j} = U_{N,j} = t_j$  for  $j = 0, 1, \dots$

Med  $h = 1/4$  og  $k = 1/16$  får vi  $N = 4$ ,  $k/h^2 = 1$  og  $k/2h = 0,125$ . Vi har dessuten

$$U_{0,0} = U_{4,0} = 0, \quad U_{1,0} = U_{3,0} = 1,5, \quad \text{og} \quad U_{2,0} = 2,0.$$

Det gir

$$u(0,25, 0,0625) \approx U_{1,1} = 0,75, \quad u(0,5, 0,0625) \approx U_{2,1} = 1,0, \quad u(0,75, 0,0625) = 0,25.$$

**NB!** Siden  $k/h^2 > 1/2$  bør vi ikke stole på dette resultatet, men heller benytte en implisitt metode, som i neste oppgave.

- b) Ideen nå er å erstatte sentraldifferansene for  $u_x$  og  $u_{xx}$  i oppgave a) med *mid-delverdien* av sentraldifferansene for disse beregnet i  $x_i, t_j$  og  $x_i, t_{j+1}$ . Vi ender da med følgende skjema:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} &= \frac{1}{2} \left( \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}}{2h} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} \right) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} U_{i,j+1} - \frac{k}{2h^2} (U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}) - \frac{k}{4h} (U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}) \\ = U_{i,j} + \frac{k}{2h^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + \frac{k}{4h} (U_{i+1,j} - U_{i-1,j}). \end{aligned}$$

Setter vi inn de samme verdiene som i oppgave a), samt at  $U_{0,1} = U_{4,1} = 0,0625$  gir dette:

$$\begin{aligned} 2U_{1,1} - 0,5625U_{2,1} &= 1,125 + 0,109375 = 1,234375, \\ -0,4375U_{1,1} + 2U_{2,1} - 0,5625U_{3,1} &= 1,500 = 1,500, \\ -0,4375U_{2,1} + 2U_{3,1} &= 0,875 + 0,140625 = 1,015625 \end{aligned}$$

der det siste leddet i summen på høyre side kommer fra randbetingelsene i  $t_1 = 0,0625$ .

- c) To iterasjoner med Gauss–Seidel gir:

$$\begin{array}{lll} U_{1,1}^{(0)} = 1,5 & U_{2,1}^{(0)} = 2,0 & U_{3,1}^{(0)} = 1,5 \\ U_{1,1}^{(1)} = 1,03906 & U_{2,1}^{(1)} = 1,53979 & U_{3,1}^{(1)} = 0,88761 \\ U_{1,1}^{(2)} = 1,05025 & U_{2,1}^{(2)} = 1,22938 & U_{3,1}^{(2)} = 0,81971. \end{array}$$

- 5 a) Vi vil løse ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 27(x + y),$$

på firkanten  $[0, 1] \times [0, 1]$  med randbetingelser

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 3x, \quad u(1, y) = 3y.$$

Approksimasjon av ligningen i noden  $(x_i, y_j)$  ved hjelp av sentraldifferanser, gir

$$U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i-1,j} - 4U_{i,j} = h^2 f(x_i, y_j),$$

hvor  $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$ ,  $f(x, y) = 27(x + y)$ ,  $x_i = ih$ ,  $y_j = jh$  og  $h = 1/3$ .

Approksimasjon av ligningen i  $(x_i, y_j)$ , hvor  $i, j \in \{1, 2\}$ , gir ligningene

$$\begin{aligned} -4U_{1,1} + U_{1,2} + U_{2,1} + 0 + 0 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \text{ i } (x_1, y_1), \\ U_{1,1} - 4U_{2,1} + U_{2,2} + 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \text{ i } (x_2, y_1), \\ U_{1,1} - 4U_{1,2} + U_{2,2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 0 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \text{ i } (x_1, y_2), \\ U_{2,1} + U_{1,2} - 4U_{2,2} + 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) \text{ i } (x_2, y_2). \end{aligned}$$

Dette kan skrives på matriseform

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (*)$$

- b) En iterasjon med Gauss–Seidel anvendt på ligningssystemet (\*) vi fant i a) med startvektoren  $\mathbf{U}_0 = -(1, 1, 1, 1)$ , gir

$$\begin{aligned} U_{1,1}^{(1)} &= -\frac{1}{4}(2 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -1, \\ U_{2,1}^{(1)} &= -\frac{1}{4}(2 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -1, \\ U_{1,2}^{(1)} &= -\frac{1}{4}(2 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -1, \\ U_{2,2}^{(1)} &= -\frac{1}{4}(0 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -0,5. \end{aligned}$$

- 6] La  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  slik at Laplace-transformerer vi initialverdiproblemet

$$f'(t) = e^{2t} \sin t + \int_0^t e^{2u} (\cos u + 2 \sin u) f(t-u) \, du = e^{2t} \sin t + (g * f)(t), \quad f(0) = 0,$$

der  $g(t) = e^{2t}(\cos t + 2 \sin t)$ , så får vi at

$$sF - f(0) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} + G \cdot F.$$

Innsatt for  $f(0) = 0$  og  $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{s}{(s-2)^2 + 1}$ , gir dette at

$$sF = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} (1 + sF),$$

det vil si

$$F(s) = \frac{1}{s(s-2)^2}.$$

Inverstransformasjon gir så

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \int_0^t \tau e^{2\tau} \, d\tau = \left[ \frac{1}{2} \tau e^{2\tau} \right]_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t e^{2\tau} \, d\tau \\ &= \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{2\tau} \right]_0^t = \frac{1}{4} (1 + 2t e^{2t} - e^{2t}). \end{aligned}$$

- 7] a) Etersom  $f(x)$  er en jevn funksjon er Fourier-rekken til  $f(x)$  gitt ved en Fourier-cosinusrekke der

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^a dx = \frac{a}{\pi}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^a \cos nx \, dx = \frac{2 \sin na}{\pi n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Altså har vi at Fourier-rekken til  $f(x)$  er gitt ved

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \cos nx.$$

- b) Teorem 2, side 484 i boken, forteller oss at summen til Fourier-rekken til  $f(x)$  er lik

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)].$$

Merk at hvis  $f$  er kontinuert i  $x$  så er  $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$ . Dette betyr at

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \cos nx = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = a, \\ 0 & \text{for } a < x \leq \pi. \end{cases}$$

Innsatt for  $x = 0$  gir at

$$f(0) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} = 1, \quad \text{det vil si } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2}.$$

Innsatt for  $x = a$ , samt bruke at  $2 \sin na \cos na = \sin 2na$ , gir at

$$f(a) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \cos na = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2na}{2n} = \frac{1}{2},$$

det vil si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2na}{2n} = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}.$$

- 8** a) Ved å benytte at  $\int x e^{-iwx} dx = \left(\frac{1}{w^2} - \frac{x}{iw}\right) e^{-iwx}$  får vi at den Fourier-transformerte til  $f(x)$  er gitt ved

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 (2 - |x|) e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( 2 \int_{-2}^2 e^{-iwx} dx - \int_{-2}^2 |x| e^{-iwx} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{4}{w} \sin 2w + \int_{-2}^0 x e^{-iwx} dx - \int_0^2 x e^{-iwx} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{4}{w} \sin 2w - \frac{4}{w} \sin 2w + \frac{2}{w^2} - \frac{2 \cos 2w}{w^2} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos 2w}{w^2}. \end{aligned}$$

- b) Merk at  $1 - \cos 2w = 2 \sin^2 w$ . Fra a) vet vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(w)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 \sin^2 w}{w^2} e^{iwx} dw = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} e^{iwx} dw. \end{aligned}$$

Setter vi inn for  $x = 0$  får vi at

$$f(0) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} dw = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} dw = 2,$$

det vil si,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} dw = \frac{\pi}{2}.$$

- 9] Fourier-transformerer vi den gitte partielle differensialligningen med hensyn på  $x$  får vi at den transformerte ligningen er på formen

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + w^2 \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}}, \quad (*)$$

der vi har benyttet at  $\mathcal{F}(u_{xx}) = (iw)^2 \mathcal{F}(u) = -w^2 \hat{u}$ , og at  $\mathcal{F}\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}}$ .

Fiksér så  $w$ . Det gir at (\*) kan skrives som en 1. ordens ordinær differensialligning,

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + w^2 \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}},$$

som har integrerende faktor  $e^{\int w^2 dt} = e^{w^2 t}$ , slik at løsningen er gitt ved

$$\begin{aligned} \hat{u}(w, t) &= e^{-w^2 t} \left( \int e^{w^2 t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}} dt + c(w) \right) \\ &= e^{-w^2 t} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{w^2 t - \frac{w^2}{4}}}{w^2} + c(w) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w^2} + c(w) e^{-w^2 t}. \end{aligned}$$

Initialbetingelse  $u(x, 0) = 0$  gir at

$$\hat{u}(w, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w^2} + c(w) = 0,$$

det vil si,

$$c(w) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w^2}.$$

Altså har vi at

$$\hat{u}(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}} \frac{1 - e^{-w^2 t}}{w^2}.$$

Ved å ta inverstransformen får vi så at

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(w, t) e^{iwx} dw = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{4}} \frac{1 - e^{-w^2 t}}{w^2} e^{iwx} dw \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{4}} \frac{1 - e^{-w^2 t}}{w^2} (\cos wx + i \sin wx) dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{w^2}{4}} \frac{1 - e^{-w^2 t}}{w^2} \cos wx dw. \end{aligned}$$

Altså er  $g(w, t) = \frac{1 - e^{-w^2 t}}{w^2}$ .