Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 12

$\boxed{1}$ **a)** Det lineære ligningssystemet kan skrives på formen

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 \quad &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1, \end{aligned}$$

som gir følgende iterasjonsskjema for Gauss–Seidels metode:

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_2^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_1^{(n+1)} + \tfrac{1}{2}x_3^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} &= 1 - x_2^{(n+1)} \end{aligned}$$

Dette gir oss følgende tabell:

n	0	1	2
$x_1^{(n)}$	0	−0,50	−0,8750
$x_2^{(n)}$	0	−0,75	−0,0625
$x_3^{(n)}$	0	1,75	1,0625

b) Hvis vi skriver koeffisientmatrisen til systemet på formen $A = D + L + U$, det vil si,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ 1 & & \\ 0 & 1 & \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} & 1 & 0 \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix}}_{U} = D + L + U,$$

ser vi at Gauss–Seidels iterasjonsmetode ikke kan anvendes her, ettersom D er singulær (det vil si, ikke inverterbar).

La så $A = M - N$. Matrisen M må ha diagonalelement $m_{ii} \neq 0$ for $i = 1, 2, 3$. Velger så

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{slik at} \quad A = M - N.$$

Fra $M\mathbf{x}^{(n+1)} = N\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b}$ får vi følgende iterasjonsskjema for Gauss–Seidels metode:

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_2^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_1^{(n+1)} + \tfrac{1}{2}x_3^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} &= 1 - x_2^{(n+1)} - x_3^{(n)} \end{aligned}$$

Én iterasjon gir så at $\mathbf{x}^{(1)} = (-0.50, -0,75, 1,75)$.

$\boxed{2}$ Heuns metode gir at

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

der

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n), \\ k_2 &= hf(t_n + h, y_n + k_1). \end{aligned}$$

I vårt tilfelle er $f(t_n, y_n) = 3y_n t_n + 1$, $t_0 = 1$ og $y_0 = 1$. Innsatt i Heuns metode får vi så, med skrittlengde $h = 0{,}1$, at

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n) = 0{,}1(3 \cdot 1 \cdot 1 + 1) = 0{,}4 \\ k_2 &= hf(t_n + h, y_n + k_1) = 0{,}1 f(1{,}1, 1{,}4) = 0{,}1(3 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}1 + 1) = 0{,}562, \end{aligned}$$

slik at

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}(0{,}4 + 0{,}562) = 1{,}481.$$

$\boxed{3}$ **a)** I vårt tilfelle er $f(t_n, y_n) = 50(\cos t_n - y_n)$, $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ og $h = 0{,}1$. Det gir at

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, y_0) = 50(\cos 0 - 0) = 50, \\ k_2 &= f\big(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_1\big) = f(0{,}05, 2{,}5) = 50(\cos 0{,}05 - 2{,}5) \approx -75{,}0625, \\ k_3 &= f\big(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2\big) = f(0{,}05, -3{,}75313) = 50(\cos 0{,}05 + 3{,}75313) \approx 237{,}594, \\ k_4 &= f(t_0 + h, y_0 + hk_3) = f(0{,}1, 27{,}3594) = 50(\cos 0{,}1 - 27{,}3594) \approx -1138{,}22, \end{aligned}$$

som igjen gir at

$$\begin{aligned} y(0,1) \approx y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \frac{0{,}1}{6}(50 - 2 \cdot 75{,}0625 + 2 \cdot 237{,}594 - 1138{,}22) \\ &\approx -12{,}7193. \end{aligned}$$

b) Baklengs Euler i vårt tilfelle gir at

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h \cdot 50\big[\cos\big(t_0 + (n+1)h\big) - y_{n+1}\big],$$

det vil si

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 + 50h}\big[y_n + 50h \cos\big(t_0 + (n+1)h\big)\big].$$

Altså gir baklengs Euler som tilnærming for $y(0{,}1)$,

$$y(0{,}1) \approx y_1 = \frac{1}{1 + 50 \cdot 0{,}1} \cdot 50 \cdot 0{,}1 \cos 0,1 \approx 0{,}829170.$$

Den eksakte løsningen er gitt ved

$$y(t) = \frac{50}{2501}(50 \cos t + \sin t - 50e^{-50t}),$$

slik at

$$y(0{,}1) = \frac{50}{2501}(50 \cos 0{,}1 + \sin 0{,}1 - 50e^{-50 \cdot 0{,}1}) \approx 0{,}989867.$$

En sammenligning av resultatet vi fant med den eksakte verdien for $y(0{,}1)$, og resultatet i **a)** viser at en eksplisitt metode (RK4) passer svært dårlig for denne *stive* ligningen. (En ligning er *stiv* hvis den eksakte løsningen har et ledd på formen e^{-ct}, der c er en stor positiv konstant.)

$\boxed{4}$ **a)** Innfører $y_1 = x$ og $y_2 = y_1' = x'$. Det gir

$$y_1' = x' = y_2, \quad \text{og} \quad y_2' = x'' = x - 2x' + 3 - t = y_1 - 2y_2 + 3 - t.$$

Altså kan vi skrive initialverdiproblemet

$$x'' + 2x' - x = 3 - t, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 2, \tag{$*$}$$

som et system av to førsteordens differensialligninger

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - 2y_2 + 3 - t \end{bmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) Heuns metode gir at

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}),$$

der

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}). \end{aligned}$$

I vårt tilfelle har vi at

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= 0{,}1\mathbf{f}(0, \mathbf{y}_0) = 0{,}1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - 2 \cdot 2 + 3 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{k_2} &= 0{,}1\mathbf{f}(0{,}1, \mathbf{y}_0 + \mathbf{k_1}) = 0{,}1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1{,}2 - 2 \cdot 2 + 3 - 0{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}01 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

slik at

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}01 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1{,}200 \\ 2{,}005 \end{bmatrix}.$$