Løsningsforslag — Øving 10

1 Vi har at

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

der

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 13\ln x - y^2 \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Finner så Jacobi-matrisen til $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, det vil si

$$J(x,y) = J\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{13}{x} & -2y \\ 4x - y - 5 & -x \end{bmatrix}.$$

Dette gir at

$$J^{(0)} = J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{13}{x_0} & -2y_0 \\ 4x_0 - y_0 - 5 & -x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}6 & -10{,}0 \\ 10{,}0 & -5{,}0 \end{bmatrix}.$$

For å finne første iterasjon for Newtons metode, $\mathbf{x}^{(1)}$, må vi løse ligningsystemet

$$J^{(0)}\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3{,}6 & -10{,}0 \\ 10{,}0 & -5{,}0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) = -\begin{bmatrix} f_1(x_0,y_0) \\ f_2(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}9227 \\ -1{,}0000 \end{bmatrix}.$$

Ved å gange med $(J^{(0)})^{-1}$ får vi at

$$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = (J^{(0)})^{-1}\big(-\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})\big) = \begin{bmatrix} -0{,}0610 & 0{,}1220 \\ -0{,}1220 & 0{,}0439 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}9227 \\ -1{,}0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0657 \\ 0{,}0687 \end{bmatrix}.$$

Fra dette får vi at den første iterasjonen med Newtons metode, er gitt ved

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 4{,}9343 \\ 5{,}0687 \end{bmatrix}.$$

2 Lagrange-interpolasjon gir at

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{erf} x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2}\, \mathrm{d}w \\ &\approx p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\ell_k(x)}{\ell_k(x_k)} f_k = \frac{\ell_0(x)}{\ell_0(x_0)} f_0 + \frac{\ell_1(x)}{\ell_1(x_1)} f_1 + \frac{\ell_2(x)}{\ell_2(x_2)} f_2 \\ &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_0)} f_2. \end{aligned}$$

I vårt tilfelle er $x_0 = 0,25$, $x_1 = 0{,}5$ og $x_2 = 1$. Videre har vi at $f_0 = f(0{,}25) = 0{,}27633$, $f_1 = f(0{,}5) = 0{,}52050$ og $f_2 = f(1) = 0{,}84270$. Dette gir at

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{(x-0{,}5)(x-1)}{(0{,}25-0,5)(0{,}25-1)} \cdot 0{,}27633 + \frac{(x-0{,}25)(x-1)}{(0{,}5-0{,}25)(0{,}5-1)} \cdot 0{,}52050 \\ &\quad + \frac{(x-0{,}25)(x-0,5)}{(1-0{,}25)(1-0{,}5)} \cdot 0{,}84270 \\ &= -0{,}44304x^2 + 1{,}30896x - 0{,}02322 \end{aligned}$$

med $5S$. Videre har vi, med 5S, at

$$p_2(0{,}75) = -0{,}44304 \cdot 0{,}75^2 + 1{,}30896 \cdot 0{,}75 - 0{,}02322 = 0{,}70929.$$

3 Newtons dividerte differanser gir oss følgende tabell:

x_j	$f_j = f(x_j)$	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$
0,5	0,479		
		0,724	
1,0	0,841		−0,437
		0,068	
2,0	0,909		

Altså har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ &= 0{,}479 + 0{,}724(x-0{,}5) - 0{,}437(x-0{,}5)(x-1{,}0) \\ &= -0{,}437x^2 + 1{,}38x - 0{,}102 \end{aligned}$$

med 3S. Fra dette får vi, med 3S, at

$$f(0{,}8) \approx 0{,}722 \qquad \text{og} \qquad f(0{,}9) \approx 0{,}786.$$

4 Vi skal finne polynomet av lavest mulig grad som interpolerer det gitte datasettet. Bruker så Newtons dividerte differanser. Det gir oss følgende tabell:

x_j	$f_j = f(x_j)$	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$	$f[x_j, \ldots, x_{j+3}]$	$f[x_j, \ldots, x_{j+4}]$
0	2				
		−3			
1	−1		3		
		3		−2	
2	2		−3		1
		−3		2	
3	−1		3		
		3			
4	2				

Altså har vi at $f(x) \approx p_4(x)$, der

$$\begin{aligned}
p_4(x) = f_0 &+ (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\
&+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
&+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] \\
= 2 &- 3x + 3x(x-1) - 2x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3) \\
= x^4 &- 8x^3 + 20x^2 - 16x + 2.
\end{aligned}$$

Legg merke til at vi også kunne benyttet oss av Newtons foroverdifferanseformel, da nodene er jevnt fordelt. Polynomet vi får ut da blir det samme som det vi fant over.

5 **a)** Vi skal finne polynomet av lavest mulig grad som interpolerer det gitte datasettet. Bruker så Newtons dividerte differanser. Det gir oss følgende tabell:

t_j	$p_j = p(t_j)$	$p[t_j, t_{j+1}]$	$p[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$p[t_j, \ldots, t_{j+3}]$	$p[t_j, \ldots, t_{j+4}]$
-2	12				
		-12			
-1	0		6		
		0		-1	
0	0		3		0
		6		-1	
1	6		0		
		6			
2	12				

Altså har vi at

$$\begin{aligned}
p(t) = p_0 &+ (t-t_0)p[t_0,t_1] + (t-t_0)(t-t_1)p[t_0,t_1,t_2] \\
&+ (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)p[t_0,t_1,t_2,t_3] \\
&+ (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)p[t_0,t_1,t_2,t_3,t_4] \\
= 12 &- 12(t+2) + 6(t+2)(t+1) - (t+2)(t+1)t \\
= -t^3 &+ 3t^2 + 4t.
\end{aligned}$$

b) I vårt tilfelle er $h = 1$. Simpsons regel gir så at

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} p(t)\ \mathrm{d}t &\approx \frac{h}{3}(p_0 + 4p_1 + 2p_2 + 4p_3 + p_4) \\
&= \frac{1}{3}(12 + 4\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot 6 + 12) = 16.
\end{aligned}$$

Regner så ut det eksakte integralet, det vil si

$$\int_{-2}^{2} p(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} (-t^3 + 3t^2 + 4t)\ \mathrm{d}t = \left[t^3\right]_{-2}^{2} = 16,$$

der vi har benyttet oss av at $-t^3$ og $4t$ er odde funksjoner.

Altså gir Simpsons regel eksakt svar i dette tilfellet. Dette er som forventet da feilen til Simpsons regel er gitt ved

$$-\frac{1}{45}p^{(4)}(\xi), \qquad -2 < \xi < 2,$$

og da vi har at i vårt tilfelle er $p^{(4)}(t) = 0$ for alle t, slik at feilen også er 0.

$\boxed{6}$ La $f(x) = \sin x^2$. Simpsons regel gir, med $2m = 10$, at

$$\begin{aligned} S(1{,}25) &= \int_0^{1{,}25} \sin x^2 \, \mathrm{d}x \\ &\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + 2f_8 + 4f_9 + f_{10}), \end{aligned}$$

der

$$h = \frac{1{,}25 - 0}{10} = \frac{1}{8},$$

og

$$f_k = f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 10,$$

hvor $x_0 = 0$, og $x_k = x_0 + kh = \frac{k}{8}$ for $k = 1, 2, \ldots, 10$.
Altså har vi følgende verdier for x_k:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$

Fra Simpsons regel får vi da at

$$\begin{aligned} S(1{,}25) &= \int_0^{1{,}25} \sin x^2 \, \mathrm{d}x \\ &\approx \frac{1}{24}\Big[f(0) + 4f\big(\tfrac{1}{8}\big) + 2f\big(\tfrac{1}{4}\big) + 4f\big(\tfrac{3}{8}\big) + 2f\big(\tfrac{1}{2}\big) + 4f\big(\tfrac{5}{8}\big) + \\ &\qquad 2f\big(\tfrac{3}{4}\big) + 4f\big(\tfrac{7}{8}\big) + 2f(1) + 4f\big(\tfrac{9}{8}\big) + f\big(\tfrac{5}{4}\big)\Big] \\ &= \frac{1}{24}\left(4\sum_{j=1}^{5} \sin\left(\frac{j}{4} - \frac{1}{8}\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{4} \sin\frac{k^2}{16} + \sin\frac{25}{16}\right) \\ &= 0{,}545941 \qquad \text{(med 6S)}. \end{aligned}$$