Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 2

$\boxed{1}$ Funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} 20\cos\pi t & \text{for } 3 < t < 6, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

kan skrives, ved hjelp av sprangfunksjoner, som

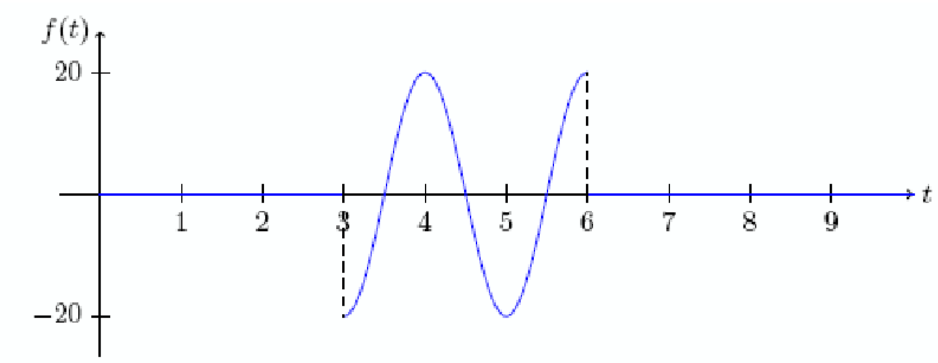
$$f(t) = 20\cos\pi t\big(u(t-3) - u(t-6)\big).$$

Ettersom $\cos\pi t = \cos\pi(t-2n)$ og $\cos\pi t = -\cos\pi\big(t-(2n+1)\big)$ for alle heltall n (hvorfor?), kan vi skrive

$$f(t) = 20\cos\pi t\big(u(t-3) - u(t-6)\big)\big) = 20\big(-\cos\pi(t-3)u(t-3) - \cos\pi(t-6)u(t-6)\big).$$

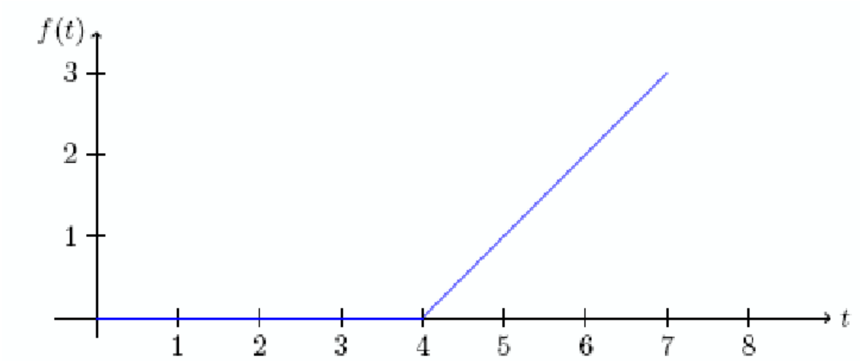
Ved å anvende andre forskyvningsteorem (side 235 i boken), altså forskyvning langs t-aksen, får vi at

$$\mathscr{L}(f) = \frac{20s}{s^2+\pi^2}(-e^{-3s} - e^{-6s}) = -\frac{20s}{s^2+\pi^2}(e^{-3s} + e^{-6s}).$$



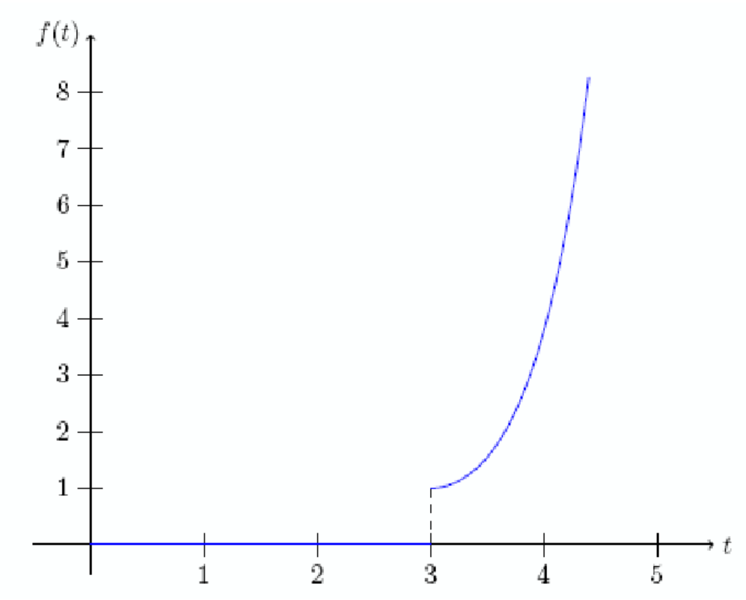
$\boxed{2}$ Ved å benytte andre forskyvningsteorem får vi at

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s^2}\right) = (t-4)u(t-4).$$



3 Fra tabell 6.1, side 224 i boken, ser vi at $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-4}\right) = \cosh 2t$. Andre forskyvningsteorem gir så at

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{se^{-3s}}{s^2-4}\right) = \cosh 2(t-3)u(t-3).$$



4 Vi ser at funksjonen $r(t)$ kan skrives ved hjelp av sprangfunksjoner,

$$r(t) = 1 - u(t-1) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Ved å anvende Laplace-transformasjon på alle ledd i initialverdiproblemet

$$y'' + 3y' + 2y = r(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0, \tag{1}$$

får vi

$$s^2Y - sy'(0) - y(0) + 3\big(sY - y(0)\big) + 2Y = \frac{1-e^{-s}}{s}, \tag{2}$$

der $Y = \mathscr{L}(y)$. Innsatt for $y(0) = y'(0) = 0$ kan vi skrive (2) som

$$(s^2 + 3s + 2)Y = \frac{1-e^{-s}}{s}.$$

Ved å bruke delbrøkoppspalting får vi da at

$$Y = \frac{1-e^{-s}}{s(s+1)(s+2)} = (1-e^{-s})\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}\right).$$

Andre forskyvningsteorem gir så at (1) har løsning

$$y(t) = \mathscr{L}(Y) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \left(\frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right)u(t-1).$$

5 Strømmen $i(t)$ i en RLC-seriekrets (mostand, induktans og kapasitans koblet i serie) finnes ved å løse ligningen

$$Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau = v(t).$$

I vårt tilfelle er $R = 2\Omega$, $L = 1$ H, $C = 2$ F og $v(t) = 255\sin t\big(1 - u(t-2\pi)\big)$ V, det vil si

$$2i(t) + i'(t) + 10\int_0^\tau i(\tau)\mathrm{d}\tau = 255\sin t\big(1 - u(t-2\pi)\big), \tag{3}$$

hvor vi har droppet enheter.

Laplace-transformerer vi alle ledd i (3) får vi at

$$2I + sI - i(0) + \frac{10}{s}I = \frac{255}{s^2+1}(1 - e^{-2\pi s}) \tag{4}$$

der $I = \mathscr{L}(i)$. Per antagelse har vi at $i(0) = 0$. Løser vi (4) for I får vi at

$$I = \frac{255s}{(s^2+1)(s^2+2s+10)}(1 - e^{-2\pi s}).$$

La så $B(s) = \frac{255s}{(s^2+1)(s^2+2s+10)}$ og la $b(t) = \mathscr{L}^{-1}(B)$. Forskyvning langs t-aksen (andre forskyvningsteorem, side 235 i boken) gir da at

$$i(t) = b(t) - b(t-2\pi)u(t-2\pi).$$

Delbrøkoppspaltning gir så at

$$\begin{aligned} B(s) = \frac{255s}{(s^2+1)(s^2+2s+10)} &= \frac{6+27s}{s^2+1} - \frac{60+27s}{s^2+2s+10} \\ &= \frac{6+27s}{s^2+1} - \frac{33}{(s+1)^2+9} - \frac{27(s+1)}{(s+1)^2+9}, \end{aligned}$$

som igjen gir at

$$b(t) = \mathscr{L}^{-1}(B) = 6\sin t + 27\cos t - e^{-t}(11\sin 3t + 27\cos 3t).$$

Ettersom $i(t) = b(t) - b(t-2\pi)u(t-2\pi)$ får vi da at

$$\begin{aligned} i(t) = {} & 6\sin t + 27\cos t - e^{-t}(11\sin 3t + 27\cos 3t) \\ & - \big(6\sin t + 27\cos t - e^{-(t-2\pi)}(11\sin 3t + 27\cos 3t)\big)u(t-2\pi), \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet at $\sin nt = \sin n(t-2\pi)$ og $\cos nt = \cos n(t-2\pi)$ for alle heltall n.

6 Ved å Laplace-transformere hvert enkelt ledd i initialverdiproblemet

$$y'' + y = \delta(t-2\pi), \qquad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0$$

får vi at

$$(s^2+1)Y = 10s + e^{-2\pi s}, \tag{5}$$

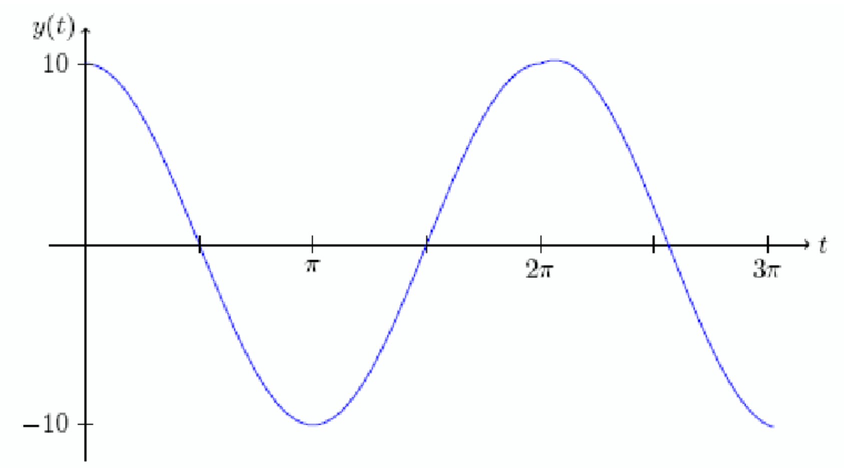
der $Y = \mathscr{L}(y)$. Løser så (5) med hensyn på Y, det vil si

$$Y = \frac{10s}{s^2+1} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}.$$

Dette gir, ved forskyvning langs t-aksen (andre forskyvningsteorem, side 235 i boken), at

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}(Y) = 10\cos t + \sin t\ u(t-2\pi)$$

hvor vi har benyttet at $\sin(t-2\pi) = \sin t$.



Dette kan for eksempel beskrive en udempet svingning som får et lite kakk etter en tid (her $t = 2\pi$).

$\boxed{7}$ Ved å Laplace-transformere hvert enkelt ledd i initialverdiproblemet

$$y'' + 5y = 25t - 100\delta(t-\pi), \qquad y(0) = -2, \quad y'(0) = 5$$

får vi at

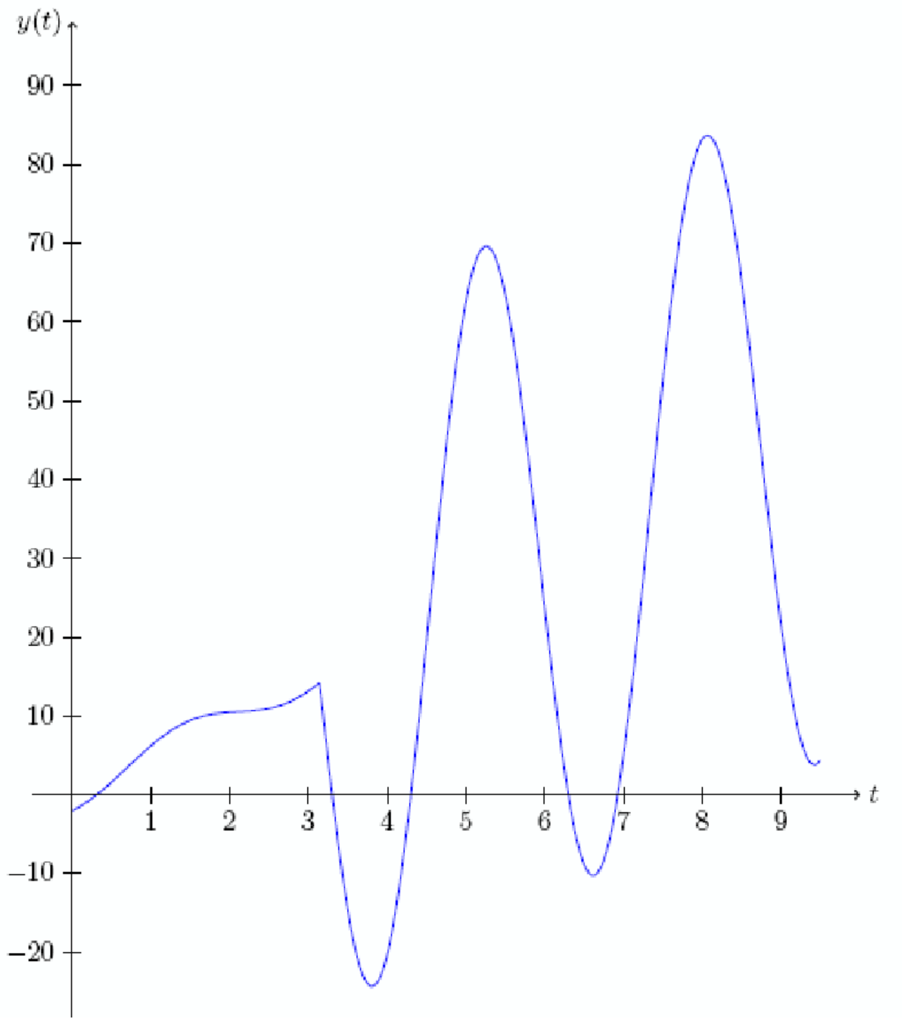
$$(s^2+5)Y = 5 - 2s + \frac{25}{s^2} - 100e^{-\pi s}, \tag{6}$$

der $Y = \mathscr{L}(y)$. Løser så (6) med hensyn på Y, det vil si

$$Y = \frac{5}{s^2+5} - \frac{2s}{s^2+5} + \frac{25}{s^2(s^2+5)} - \frac{100e^{-\pi s}}{s^2+5} = \frac{5}{s^2} - \frac{2s}{s^2+5} - \frac{100e^{-\pi s}}{s^2+5}.$$

Dette gir, ved forskyvning langs t-aksen (andre forskyvningsteorem, side 235 i boken), at

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}(Y) = 5t - 2\cos\sqrt{5}t - 20\sqrt{5}\sin\sqrt{5}(t-\pi)\ u(t-\pi).$$



Dette kan for eksempel beskrive en udempet svingning som får et kraftig kakk etter en tid (her $t = \pi$).

$\boxed{8}$ «Sagtann-bølgen» for intervallet kan beskrives ved funksjonen

$$f(t) = \frac{k}{p}t, \quad \text{for } 0 < t < p,$$

og hvor $f(t) = f(t+p)$. Funksjonen oppfyller dermed kravene stilt i teoremet gjengitt i boken nederst på side 247. Det vil si,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f) &= \frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{k}{p(1-e^{-ps})}\int_0^p te^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \frac{k}{p(1-e^{-ps})}\left(\frac{1}{s^2}(1-e^{-ps}) - \frac{p}{s}e^{-ps}\right) = \frac{k}{ps^2} - \frac{ke^{-ps}}{s(1-e^{-ps})}.\end{aligned}$$

$\boxed{9}$

$$t * e^t = \int_0^t (t-\tau)e^{\tau}\mathrm{d}\tau = te^t - t - \int_0^t \tau e^{\tau}\mathrm{d}\tau = te^t - t - \left(te^t - e^t + 1\right) = e^t - t - 1$$

10 Vi merker oss at integralligningen

$$y(t) + 2e^t \int_0^t e^{-\tau} y(\tau)\mathrm{d}\tau = te^t,$$

kan skrives på formen

$$y(t) + 2\big(e^t * y(t)\big) = te^t, \tag{7}$$

ettersom $2e^t \int_0^t e^{-\tau} y(\tau)\mathrm{d}\tau = 2\int_0^t e^{t-\tau} y(\tau)\mathrm{d}\tau = 2\big(e^t * y(t)\big)$. Anvender så Laplace-transformasjonen på hvert enkelt ledd i (7). Det gir

$$Y + 2 \cdot \frac{1}{s-1} \cdot Y = \frac{1}{(s-1)^2}, \tag{8}$$

der $Y = \mathscr{L}(y)$. Løser så (8) med hensyn på Y, som gir

$$Y = \frac{1}{(s-1)^2} \frac{1}{1 + \frac{2}{s-1}} = \frac{1}{(s-1)^2} \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right).$$

Altså får vi at

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}(Y) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh t.$$