

Numerisk løsning av ordinære differensiell ligninger — del 2

Markus Grasmair

Institutt for matematiske fag,
NTNU,
Trondheim

Trondheim,
3. november 2020

Feilanalyse for Eulers metode

Vi velger en konstant steglengde

$$h := \frac{x_{\text{end}} - x_0}{N}$$

og definerer:

- e_n ... global feil.
- d_{n+1} ... lokal trunkeringsfeil.

Gitt at funksjonen f og løsningen y er glatt nok finnes det konstanter $C > 0$ og $D > 0$ slik at:

$$\|d_{n+1}\| \leq Dh^2 \quad \text{for alle } n = 0, \dots, N-1,$$

og

$$\|e_N\| \leq Ch.$$

Dvs at Eulers metode har konvergensorden $p = 1$.

Konvergensorden

Generelt sier vi at en metode har konvergensorden $p > 0$, hvis det finnes $C > 0$ slik at

$$\|e_N\| \leq Ch^p.$$

For alle metodene vi bruker har vi at:

- Hvis (f er glatt nok og) det finnes $D > 0$ slik at

$$\|d_{n+1}\| \leq Dh^{p+1}$$

for alle $n = 0, \dots, N - 1$, så har metoden konvergensorden p .

Heuns metode

Et steg i Heuns metode er gitt som

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= \vec{f}(x_n, \vec{y}_n), \\ \vec{k}_2 &= \vec{f}(x_n + h, \vec{y}_n + h\vec{k}_1), \\ \vec{y}_{n+1} &= \vec{y}_n + \frac{h}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2).\end{aligned}$$

Det kan vises at:

- Den lokale trunkeringsfeilen er av størrelsen h^3 .
- Dermed har metoden konvergensorden $p = 2$.

Mål for i dag

- Numeriske feilestimat og steglengdekontroll.
- Runge–Kutta metoder.