Matematikk 4N — 8. september

Eksempel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

[periodisk utvidet til $\mathbb{R}$]

har Fourierkoeffisientene (Eksamen 2013)

$$a_0 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n = (-1)^n \frac{2}{n^2}$$

$$b_n = \begin{cases} -\pi/n & n \text{ partall} \\ \frac{\pi}{n} - \frac{4}{n^3 \pi} & n \text{ oddetall} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ funksjonen er kontinuerlig i alle punkt unntatt $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$

$\Longrightarrow$ Fourierrekken konvergerer til $f(x)$ i alle punkt unntatt $\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$

og: Fourierrekken konvergerer til $\frac{1}{2}\Big[\underbrace{f(\pi+0)}_{=0} + \underbrace{f(\pi-0)}_{\pi^2}\Big] = \frac{\pi^2}{2}$ i $\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$

$\Longrightarrow$ f. eks: $x = 0$ gir oss:

$$0 = f(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\cos(n0)}_{1} + b_n \underbrace{\sin(n \cdot 0)}_{0}\right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{2}{n^2}$$

Dvs: $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{2}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

eller $$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}}_{-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - + \cdots} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Fourierrekker for funksjoner med periode $p = 2L$

Anta at $f(x)$ har periode $p = 2L$.

$\rightsquigarrow$ variabelbytte $x = \frac{p}{2\pi} \cdot y = \frac{L}{\pi} \cdot y \iff y = \frac{\pi}{L} \cdot x$

$$\rightsquigarrow \boxed{f(x)} = \underbrace{f\left(\frac{L}{\pi} \cdot y\right)}_{2\pi\text{-periodisk i } y} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos ny + b_n \sin ny\right)$$

$$\boxed{= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)}$$

med:
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \boxed{f\left(\frac{L}{\pi} \cdot y\right)} \, dy$$

2π-periodisk i variablen y og Euler-formlene trenger perioden 2π.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi} y\right) \cdot \cos ny \, dy$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi} y\right) \sin ny \, dy$$

Eller: skrive det om til opprinnelige variablene:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi} y\right) dy \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(x) \frac{\pi}{L} \, dx$$

$$x = \frac{L}{\pi} y$$

$$dx = \frac{L}{\pi} dy$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \, dx$$

samme med a_n, b_n

$\Longrightarrow$ Hvis f har perioden $p = 2L$, så er

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

med

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

Like og odde funksjoner

Husk: En funksjon $f(x)$ er like hvis $f(x) = f(-x)$

En funksjon $f(x)$ er odde hvis $f(x) = -f(-x)$

Hvis f er en like funksjon, så er: (2L-periodisk)

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{like}} \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{L}}_{\text{odde}}}_{\text{odde}} \, dx \overset{!}{=} 0$$

og

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)}_{\text{like}} \, dx \overset{!}{=} \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \overset{!}{=} \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

$\leadsto$ kan skrive f som „Fourier cosinusrekke"

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

med a_0, a_n definert her.

Hvis f er en odde funksjon, så er: (2L periodisk)

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{odde}} \underbrace{\cos \frac{n\pi x}{L}}_{\text{like}}}_{\text{odde}} \, dx = 0$$

og $$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{odde}}\,\underbrace{\sin\frac{n\pi x}{L}}_{\text{odde}}}_{\text{like}}\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$\leadsto$ En odde funksjon har en „Fouriersinusrekke"

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

med b_n definert her:

Nå: Har en vilkårlig funksjon $f: [0, L] \to \mathbb{R}$.

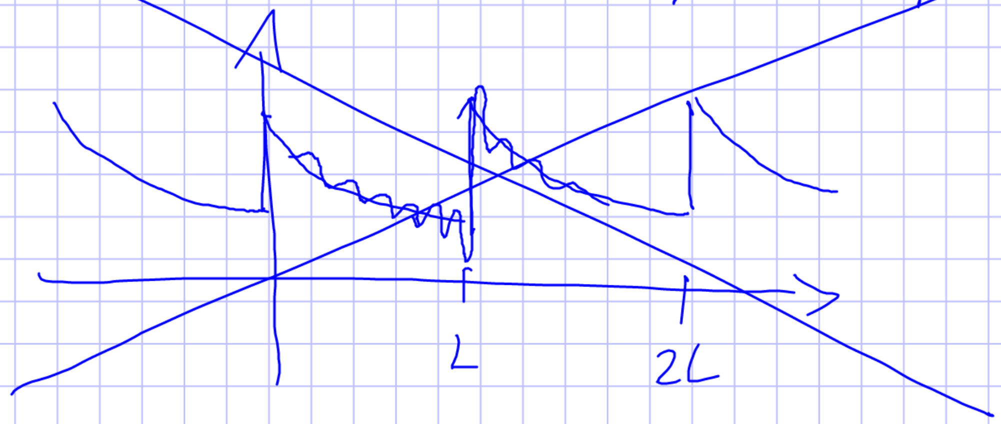
Vil: skrive den som Fourierrekke

$\leadsto$ trenger en passende <u>periodisk</u> utvidelse

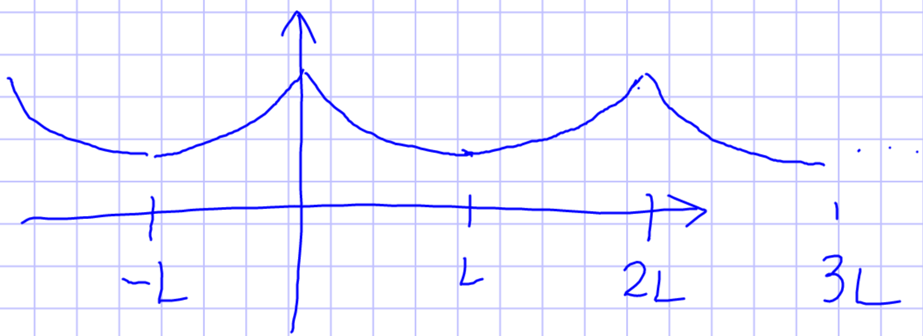
f.eks.:

$f(x) =$

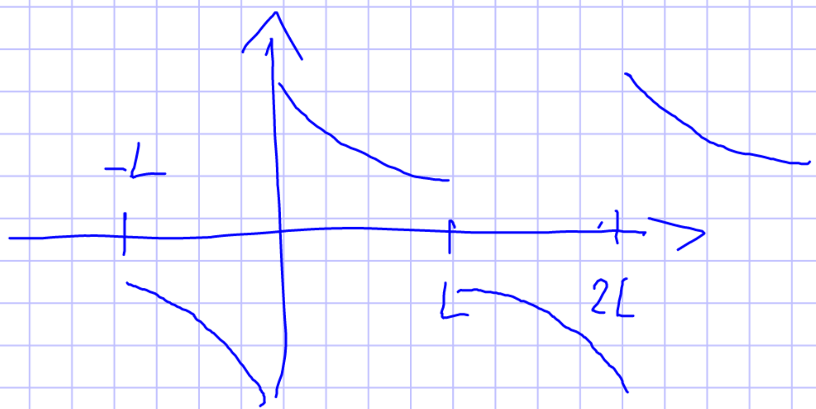
• ~~kan anse det som L-periodisk funksjon:~~



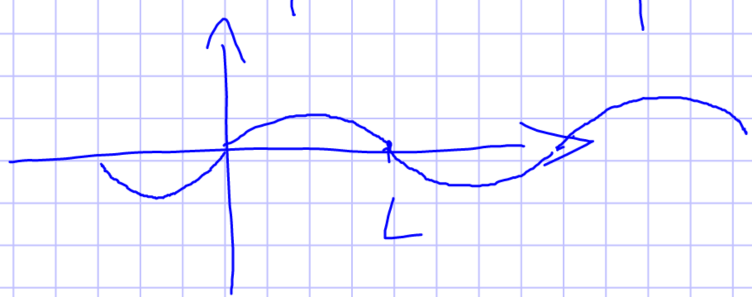
• like, 2L-periodisk utvidelse



• odde 2L-periodisk utvidelse



spesielt hvis $f(0) = 0 = f(L)$



→ får to forskjellige muligheter for å skrive f som Fourierrekke:

- like utvidelse ⟹ får:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \qquad \text{for } 0 \leq x \leq L$$

med:
$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

[OBS: formlene for a_0, a_n bruker bare funksjonen f, men ikke utvidelsen til f]

- odde utvidelse ⟹ får

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

med $$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$