Matematikk 4N – 17. november

Har et system av ODEer $\vec{u}' = \frac{1}{(\Delta x)^2}(A\vec{u} + \vec{g}(t))$

og: egenverdiene λ_n av matrisen $\frac{1}{(\Delta x)^2}A$ oppfyller

$$-\frac{4}{(\Delta x)^2} < \lambda_n < 0.$$

For stabilitet trenger vi at $\Delta t \cdot \lambda_n \in S$ for alle λ_n.

S: stabilitetsområde

For Eulers metode: $S = \{ z \in \mathbb{C} : |1+z| \leq 1 \}$

For reelle $z \iff -2 \leq z \leq 0$.

Her: trenger at $\Delta t \cdot \lambda_n \geq -2$ $\left[\text{siden } \lambda_n \geq -\frac{4}{(\Delta x)^2}\right]$

$$\Rightarrow -4\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \geq -2 \text{ eller: } \boxed{\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}}$$

$\Longrightarrow$ nødvendig å bruke implisitte metoder hvis Δx er liten.

- Implisitt Eulermetode:

For systemet $\vec{u}' = \frac{1}{(\Delta x)^2}(A\vec{u} + \vec{g}(t))$

får vi $\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(A\vec{u}^{n+1} + \vec{g}(t_{n+1}))$

Hvis vi definerer $r := \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, kan vi skrive det som

$$(\underbrace{I}_{\sim} - rA)\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + r\vec{g}(t_{n+1}).$$

↳ identitetsmatrise

- metoden er A(0)-stabil ⟹ iterasjon er stabil for alle steglengder Δt og Δx.

- man kan vise at feilen er på størrelsen $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$.

- Trapesregel for ODEer = CRANK-NICOLSON

Her: $\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}\left(A\vec{u}^n + \vec{g}(t_n) + A\vec{u}^{n+1} + \vec{g}(t_{n+1})\right)$

eller $(I - \frac{r}{2}A)\vec{u}^{n+1} = (I + \frac{r}{2}A)\vec{u}^n + \frac{r}{2}(\vec{g}(t_n) + \vec{g}(t_{n+1}))$

- metoden er $A(0)$-stabil
- feilen er på størrelsen $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$.