Matematikk 4N – 13. november

Eks.: $u'' + 2u' - 3u = 9x, \quad 0 < x < 1$

$u(0) = 1, \quad u(1) = e^{-3} + 2e - 5 \approx 0,486351\ldots$

=> For approksimasjon:

$$\frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2} + 2\,\frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} - 3u(x_i) + O(h^2) = 9x_i$$

-> Diskretiseringen blir:

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{h} - 3U_i = 9x_i$$

+ Randbetingelser $\quad U_0 = 1, \quad U_N = 0,486\ldots$

$$\Longleftrightarrow \quad (1-h)U_{i-1} - (2 + 3h^2)U_i + (1+h)U_{i+1} = 9x_i$$

F.eks.: $N = 4, \quad h = \frac{1}{4}, \quad x_i = \frac{i}{4}$

$$\left[\ 1-h = 3/4,\quad 2+3h^2 = \frac{35}{16},\quad 1+h = 5/4\ \right]$$

$\Longrightarrow$ får systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & -\frac{35}{16} & 5/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -\frac{35}{16} & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & -\frac{35}{16} & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9/64 \\ 9/32 \\ 27/64 \\ 0{,}486\ldots \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_a \\ \leftarrow 9h^2 x_i \\ \\ \\ \leftarrow u_b \end{matrix}$$

Neumann-randbetingelser:

Anta nå at vi har en Neumannrandbetingelse i punktet a: $\quad u'(a) = u'_a$

$\quad$ [og fortsatt $u(b) = u_b$]

$\Longrightarrow$ $u(a)$ og dermed U_0 er ikke kjent og vi må bruke betingelsen $u'(a) = u'_a$ for å få én ligning til.

Enkleste mulighet: bruk forover differanser

$$u'(a) = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \underline{\underline{O(h)}} \approx \frac{U_1 - U_0}{h}$$

$$\doteq u'_a \quad \Longrightarrow \text{Får: } \quad U_1 - U_0 = h\, u'_a .$$

Men: har en approksimasjonsfeil av orden 1.

Alternativ: Anta at ligningen holder utover randpunktet a til punktet $x_{-1} = a - h$ og bruk sentrale differanser for å approksimere $u'(a)$ og ligningen:

$\Longrightarrow$ Får to ligninger:

$$\frac{U_{-1} - 2U_0 + U_1}{h^2} + p(x_0)\frac{U_1 - U_{-1}}{2h} + q(x_0)U_0 = r(x_0)$$

og
$$\frac{U_1 - U_{-1}}{2h} = u'_a . \qquad (*)$$

Nå: løs $(*)$ for U_{-1} $\Longrightarrow$ $U_{-1} = U_1 - 2h\,u'_a$

og sett det inn i første ligning

$$\Longrightarrow \text{Får } \frac{U_1 - 2hu'_a - 2U_0 + U_1}{h^2} + p(x_0)\frac{U_1 - U_1 + 2hu'_a}{2h} + q(x_0)U_0 = r(x_0)$$

Eller: $$\frac{2U_1 - 2U_0}{h^2} + q(x_0)U_0 = r(x_0) + \frac{2u_a'}{h} - p(x_0)u_a'$$

$\leadsto$ kan gange det med h^2 og får

$$2U_1 - (2 - h^2 q(x_0))U_0 = h^2(r(x_0) - p(x_0)u_a') + 2hu_a'$$

$\Rightarrow$ første rad i matrisen blir:

$$(2 - h^2 q(x_0), 2, 0, 0, \dots)$$

og første koeffisient i $\vec{b}$ blir $h^2(r(x_0) - p(x_0)u_a') + 2hu_a'$.

Tidsavhengige differensialligninger, f.eks. varmeligning:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{for} \quad 0 < x < 1$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = g_1(t)$$

for $t > 0$

og initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$ for $0 < x < 1$.

Steg 1: Diskretiser PDEen i x-retningen:

Velg $M \in \mathbb{N}$, definer $\Delta x = 1/M$ og gridpunkt

$$x_i = i \Delta x, \quad i = 0, \dots, M.$$

Steg 2: Erstatt de deriverte i x-retning med finite differanser:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t) = \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2).$$

for $i = 1, \dots, M-1$.

Steg 3: Ignorer feiltermen og approksimer $u(x_i, t) \approx U_i(t)$.

$$U_i'(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{(\Delta x)^2}$$

Og: randbetingelser $U_0(t) = g_0(t)$, $U_M(t) = g_1(t)$.

+ initialbetingelser $U_i(0) = f(x_i)$, $i = 1, \dots, M-1$.

$\Rightarrow$ Får et system av ODEer – „semi-diskretisering" av PDEen.

Steg 4: Løs systemet av ODEer numerisk, f.eks. en RK-metode.

F.eks.: eksplisitt Euler-metode med steglengde Δt

$$\Rightarrow \quad U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t \cdot \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$= U_i^n + r\left(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n\right)$$

med $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ og $U_i^n \approx u(x_i, t_n)$ med $t_n = n\Delta t$.

Ser at løsningen med Eulers metode blir ustabil (avhengig av r).

$\Rightarrow$ trenger stabilitetsanalyse:

Det semi-diskrete systemet

$$U_i'(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{(\Delta x)^2}$$

med $U_0(t) = g_0(t)$ og $U_M(t) = g_1(t)$

kan skrives som $\vec{u}' = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left(A\vec{u} + \vec{g}(t)\right)$

med

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_0(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_1(t) \end{pmatrix}$$

Stabilitet er avhengig av egenverdiene til $\frac{1}{(\Delta x)^2} A$.

Her: Matrisen A er symmetrisk $\Rightarrow$ alle egenverdier er reelle!

Man kan vise at egenverdiene μ_n av A oppfyller

$$-4 < \mu_n < 0.$$

$\Rightarrow$ egenverdier til $\frac{1}{(\Delta x)^2} A$ oppfyller: $-4 < (\Delta x)^2 \lambda_n < 0$

λ_n

For stabilitet trenger vi at $\Delta t \cdot \lambda_n \in S$

stabilitetsområde til metoden