Matematikk 4N – 3. november

Numeriske feilestimat og steglengdekontroll

I praksis: veldig vanskelig å kontrollere den globale feilen
⇒ forsøke bare å kontrollere den lokale feilen.

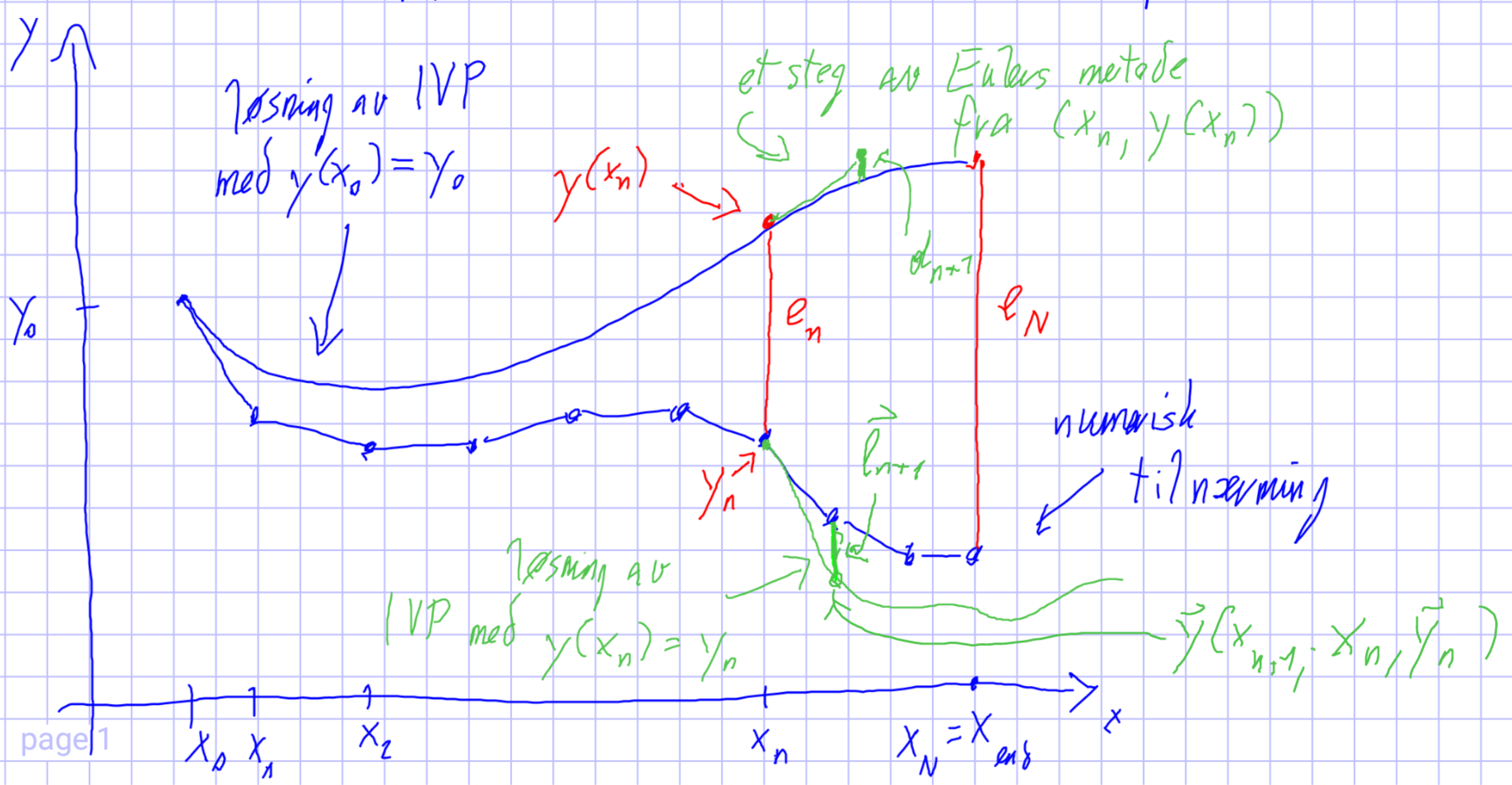
Obs.: $\vec{y}(x_{n+1}; x_n, \vec{y}_n)$ ... løsning av ODEn

$$y' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

med initialbetingelsen $\vec{y}(x_n) = \vec{y}_n$ i punktet x_{n+1}

Vil kontrollere den lokale feilen

$$\vec{\ell}_{n+1} := \vec{y}(x_{n+1}; x_n, \vec{y}_n) - \vec{y}_{n+1}$$



Anta at vi har to forskjellige metoder $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$ av ulik konvergensorden:

$\vec{\Phi}$ ... konvergensorden p

$\vec{\Psi}$ ... konvergensorden $\hat{p} \geq p+1$

$\Rightarrow$ kan beregne et steg med begge to metoder:

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\,\vec{\Phi}(x_n, \vec{y}_n, h) \qquad \text{orden } p$$

$$\vec{z}_{n+1} = \vec{y}_n + h\,\vec{\Psi}(x_n, \vec{y}_n, h) \qquad \text{orden} \geq p+1$$

$\Longrightarrow$ (lokal orden = global orden + 1)

$$\vec{\ell}_{n+1} = \vec{y}(x_{n+1}; x_n, \vec{y}_n) - \vec{y}_{n+1} = \vec{E}(x_n, \vec{y}_n) \cdot h^{p+1} + \boxed{\mathcal{O}(h^{p+2})}$$

$$\vec{y}(x_{n+1}; x_n, \vec{y}_n) - \vec{z}_{n+1} = 0 \cdot h^{p+1} + \boxed{\mathcal{O}(h^{p+2})}$$

$\rightarrow$ termer i rekken av orden $p+2$ eller større

Hvis h er lite nok er $|\mathcal{O}(h^{p+2})| \ll |\vec{E}(x_n, \vec{y}_n) \cdot h^{p+1}|$

$$\Longrightarrow \vec{\ell}_{n+1} \approx \vec{E}(x_n, \vec{y}_n)\, h^{p+1} \approx \vec{z}_{n+1} - \vec{y}_{n+1} =: \vec{\ell e}_{n+1}$$

$\vec{le}_{n+1} = \vec{z}_{n+1} - \vec{y}_{n+1}$ ... lokal <u>numerisk</u> feilestimat

Steglengdekontroll: velg en maksimal toleranse $tol > 0$.

I hvert steg:

- beregn $\vec{y}_{n+1}$, $\vec{z}_{n+1}$ og $\vec{le}_{n+1}$
- hvis $\|\vec{le}_{n+1}\| < tol$, aksepter steget og kanskje øk steglengden for neste steget
- ellers velg en mindre steglengde og prøv igjen

Velg av neste steglengden:

Vi har at $\|\vec{le}_{n+1}\| \approx D h^{p+1}$ $\quad [D \approx \|\vec{E}(x_n, \vec{y}_n)\|]$

Vil velge en ny steglengde h_{new} slik at

$$D h_{new}^{p+1} \approx tol.$$

$$\Longrightarrow \quad D \approx \frac{\|\vec{le}_{n+1}\|}{h^{p+1}} \quad \text{og} \quad D \approx \frac{tol}{h_{new}^{p+1}}$$

$\Longrightarrow$ får at $h_{new} \approx h \left(\dfrac{tol}{\|\vec{le}_{n+1}\|} \right)^{\frac{1}{p+1}}$

I praksis velger man $P<1$ [f.eks. 0,8] og definerer

$$h_{ny} := P h \left(\frac{\text{tol}}{\|\vec{le}_{n+1}\|} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

$$\vec{z}_{n+1} - \vec{y}_{n+1} = \vec{E}(x_n, \vec{y}_n) \cdot h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

og
$$\vec{l}_{n+1} = \vec{E}(x_n, \vec{y}_n) h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\vec{z}_{n+1} - \vec{y}_{n+1})}_{\vec{le}_{n+1}} - \vec{l}_{n+1} = \underbrace{\mathcal{O}(h^{p+2})}_{\text{mye mindre enn } \vec{l}_{n+1} \text{ hvis } h \text{ er liten}}$$

RUNGE-KUTTA-metoder

Eulers og Heuns metode er spesialtilfeller av (eksplisitte) Runge-Kutta metoder, som kan skrives som

$$\vec{k}_1 = \vec{f}(x_n, \vec{y}_n)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{f}(x_n + c_2 h, \vec{y}_n + h a_{21} \vec{k}_1)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{f}(x_n + c_3 h, \vec{y}_n + h(a_{31} \vec{k}_1 + a_{32} \vec{k}_2))$$

$$\vdots$$

$$\vec{k}_s = \vec{f}\left(x_n + c_s h, \vec{y}_n + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} \vec{k}_j\right)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h \cdot \sum_{j=1}^{s} b_j \cdot \vec{k}_j \, .$$

s ... antall nivåer

c_i ... noder $\qquad$ b_j ... vekter

a_{ij}, c_i, b_j ... koeffisienter til metoden

Trenger alltid at $\quad c_i = \sum_j a_{ij}$

Implisitte metoder som f.eks. trapesregelen kan også skrives på (nesten) den samme måten.

F.eks.: (trapesregelen): $\quad \vec{k}_1 = \vec{f}(x_n, \vec{y}_n)$

$$\vec{k}_2 = \vec{f}\left(x_n + h, \vec{y}_n + h\left(\tfrac{1}{2}\vec{k}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{k}_2\right)\right)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\left(\tfrac{1}{2}\vec{k}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{k}_2\right).$$

[Men: har et ligningssystem for $\vec{k}_2$]

Definisjon: En Runge-Kutta metode med s nivåer er gitt som

$$\vec{k}_i = \vec{f}\left(x_n + c_i h,\ \vec{y}_n + h \cdot \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \vec{k}_j\right)$$

for $i = 1, \dots, s$, og

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h \cdot \sum_{j=1}^{s} b_j \vec{k}_j .$$

Koeffisientene til metoden skrives ned i BUTCHER-tablået:

$$\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s
\end{array}$$

Metoden er eksplisitt hvis $a_{ij} = 0$ for $j \geq i$. (Dvs: alt her $= 0$)

Vi trenger alltid at $c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$

F.eks: Eulers metode:

$$\begin{array}{c|c}
0 & 0 \\
\hline
 & 1
\end{array}$$

$$\vec{k}_1 = \vec{f}(x_n, \vec{y}_n)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h \vec{k}_1$$

Heuns metode:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$$\vec{k}_1 = \vec{f}(x_n, \vec{y}_n)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{f}(x_n + h, \vec{y}_n + h\vec{k}_1)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{k}_2\right)$$

Trapesregelen:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Klassisk Runge-Kutta metode:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

$$\vec{k}_2 = \vec{f}\left(x_n + \frac{1}{2}h, \vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_1\right)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{f}\left(x_n + \frac{1}{2}h, \vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_2\right)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h \cdot \left(\frac{1}{6}\vec{k}_1 + \frac{1}{3}\vec{k}_2 + \frac{1}{3}\vec{k}_3 + \frac{1}{6}\vec{k}_4\right)$$