Matematikk 4N – 30. oktober

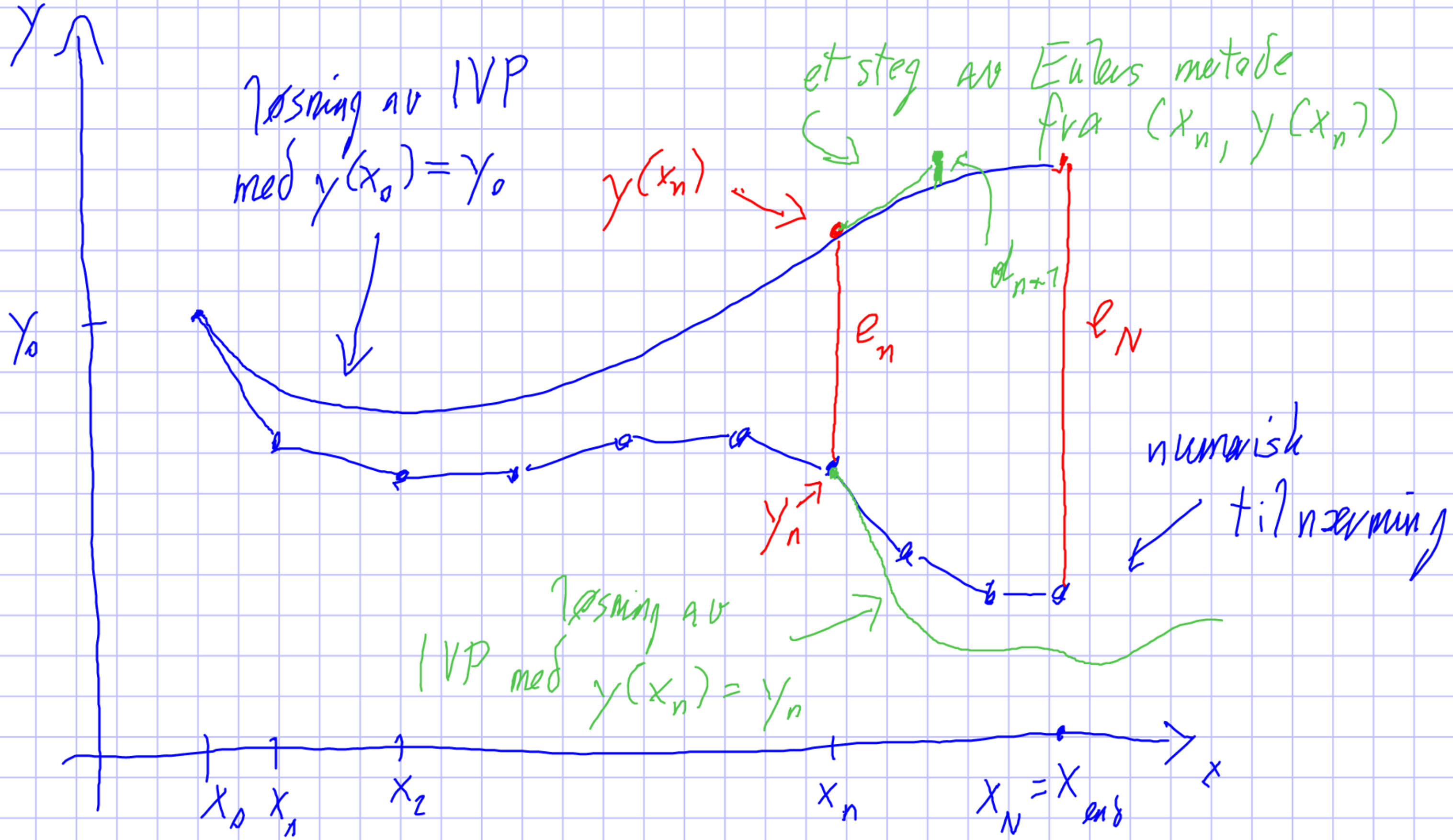
Feilanalyse for Eulers metode

Vi vil løse initialverdiproblemet (IVP)

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

med initialbetingelsen $y(x_0) = y_0$.

Eulers metode $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.



$e_n = y(x_n) - y_n$ … global feil

$d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n))$

Vi har sett at $d_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi)$ for en $\xi \in [x_n, x_{n+1}]$.

Dermed er
$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\
&= \left(d_{n+1} + y(x_n) + h f(x_n, y(x_n))\right) \\
&\quad - \left(y_n + h f(x_n, y_n)\right) \\
&= \left(y(x_n) - y_n\right) + h\left(f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)\right) \\
&\quad + d_{n+1} \\
&= e_n + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \eta) \cdot \left(\overbrace{y(x_n) - y_n}^{= e_n}\right) + d_{n+1}.
\end{aligned}
$$

for en η mellom y_n og $y(x_n)$.

Dvs: $$e_{n+1} = \left(1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \eta)\right) \cdot e_n + d_{n+1}.$$

og $$|e_{n+1}| \leq |e_n| \cdot \left(1 + h \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \eta)\right|\right) + |d_{n+1}|.$$

Anta nå at det finnes $L, D > 0$ s.a.:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y)\right| \leq L \quad \forall x, y \quad \text{og} \quad \left|\frac{y''(x)}{2}\right| \leq D \quad \forall x.$$

Så får vi at $|e_{n+1}| \le |e_n| \cdot (1+hL) + \underbrace{D h^2}$.

$$|d_{n+1}| = h^2 \left|\frac{y''(\xi)}{2}\right| \le h^2 D$$

Det betyr at:

$$|e_1| \le Dh^2$$

$$|e_2| \le (1+hL)Dh^2 + Dh^2$$

$$|e_3| \le (1+hL)^2 Dh^2 + (1+hL)Dh^2 + Dh^2$$

og generelt: $$|e_N| \le \sum_{n=0}^{N-1} (1+hL)^n Dh^2$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} (1+hL)^n\right) Dh^2$$

geometrisk summe

$$= \frac{(1+hL)^N - 1}{\cancel{(1}+\cancel{h}L) - \cancel{1}} \cdot Dh^{\cancel{2}}$$

$$= \frac{(1+hL)^N - 1}{L} \cdot Dh$$

$1+hL \le e^{hL}$

$$\le \frac{(e^{hL})^N - 1}{L} Dh = \frac{e^{hLN} - 1}{L} Dh$$

$hN = x_{end} - x_0$

$$= \underbrace{\frac{e^{L(x_{end}-x_0)} - 1}{L} D}_{=:\,C} \cdot h = C \cdot h.$$

Dvs: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Det finnes en konstant } C > 0 \text{ s.a.} \\ |y(x_N) - y_N| = |e_N| \leq C \cdot h\end{array}}$

Konvergensteori for generelle metoder

Vi ser spesielt på løsningsmetoder som kan skrives som

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h \cdot \vec{\Phi}(x_n, \vec{y}_n; h)$$

hvor $\vec{\Phi}$ er avhengig av f og forskjellige parametere.

[F.eks: Euler: $\vec{\Phi}(x_n, \vec{y}_n) = \vec{f}(x_n, \vec{y}_n)$]

Definisjon: Metoden har konvergensorden $p > 0$ (eller bare orden p), hvis det finnes $C > 0$ s.a.

$$\|\vec{e}_N\| := \|\vec{y}(x_{end}) - \vec{y}_N\| \leq C \cdot h^p.$$

hvor $h = \dfrac{x_{end} - x_0}{N}$.

Teorem: Anta at det finnes konstanter $M, D > 0$ s.a.

$$\|\vec{\Phi}(x, \vec{y}; h) - \vec{\Phi}(x, \vec{z}; h)\| \leq M \|\vec{y} - \vec{z}\|$$

og $\|\vec{y}(x+h) - (\vec{y}(x) + h\vec{\Phi}(x, \vec{y}(x); h))\| \leq D \cdot h^{p+1}$

for alle $x \in [x_0, x_{end}]$ og alle $\vec{y}$ og $\vec{z}$ som er nære nok til løsningen. Da er

$$\|\vec{e}_N\| \leq C \cdot h^p \quad \text{med } C = \frac{e^{M(x_{end} - x_0)} - 1}{M} \cdot D.$$

[Dvs: hvis den lokale trunkeringsfeilen er på størrelsen h^{p+1}, så har metoden konvergensorden p.]

Heuns metode:

Vi vil løse ligningen $\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x))$.

Kan skrive:

$$\vec{y}(x_n + h) = \vec{y}(x_n) + \int_{x_n}^{x_n+h} \vec{y}'(x)\,dx$$

$$= \vec{y}(x_n) + \int_{x_n}^{x_n+h} \vec{f}(x, \vec{y}(x))\,dx.$$

Trapesregel: $\displaystyle\int_{x_n}^{x_n+h} \vec{f}(x, \vec{y}(x))\,dx \approx \frac{h}{2}\Big(\vec{f}(x_n, \vec{y}(x_n)) + \vec{f}(x_{n+1}, \vec{y}(x_{n+1}))\Big)$

Får med denne ideen „trapesregelen for ODEer":

$$(*) \quad \vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{2}\left(\vec{f}(x_n, \vec{y}_n) + \vec{f}(x_{n+1}, \vec{y}_{n+1})\right)$$

Det er en „implisitt" metode, hvor $\vec{y}_{n+1}$ er en løsning av et ligningssystem $(*)$.

For å få en eksplisitt metode må vi erstatte $\vec{y}_{n+1}$ på høyre siden med noe som er bare avhengig av $\vec{y}_n$.

F.eks.: kan bruke Eulers metode:

$\Longrightarrow$ beregn først $\vec{u}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{f}(x_n, \vec{y}_n)$

og så $\quad \vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{2}\left(\vec{f}(x_n, \vec{y}_n) + \vec{f}(x_{n+1}, \vec{u}_{n+1})\right)$

Det er Heuns metode og er vanligvis skrevet som:

$$\vec{k}_1 := \vec{f}(x_n, \vec{y}_n)$$

$$\vec{k}_2 := \vec{f}(x_n + h, \vec{y}_n + h\vec{k}_1)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$$

[Det kan skrives som $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{\Phi}(x_n, \vec{y}_n, h)$

med $\vec{\Phi}(x_n, \vec{y}_n; h) = \frac{1}{2}\left(\vec{f}(x_n, \vec{y}_n) + \vec{f}(x_n + h, \vec{y}_n + h\vec{f}(x_n, \vec{y}_n))\right)]$

Man kan vise at den lokale feilen er $\approx C \cdot h^3$

$\Longrightarrow$ metoden har orden $\boxed{p = 2}$