Matematikk 4N - 27. oktober

Numerisk løsning av ordinære differensialligninger (ODEer)

Dvs. initialverdiproblemer

$$y' = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0 .$$

Vil finne en tilnærming til løsningen for $x > x_0$ (eller for $x \in [x_0, x_{end}]$).

Eller: systemer av ODEer:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \qquad y_1(x_0) = y_{1,0}$$
$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \qquad y_2(x_0) = y_{2,0}$$
$$\vdots$$
$$y_m' = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \qquad y_m(x_0) = y_{m,0} .$$

eller i vektorform $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}) \qquad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$

med $\vec{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$.

F.eks: LOTKA-VOLTERRA ligninger

$$y' = \alpha y - \beta yz \qquad y(0) = y_0$$
$$z' = \delta yz - \gamma z \qquad z(0) = z_0$$

som modellerer f.eks. to dyrepopulasjoner:

y ... byttedyr
$$y' = \underbrace{\alpha y}_{\text{naturligst vekst}} - \underbrace{\beta yz}_{\text{modellerer dyrene som blir spist av rovdyrene}}$$

z ... rovdyr
$$z' = \underbrace{\delta yz}_{\text{vekst av populasjon som følge av overflod av mat}} - \underbrace{\gamma z}_{\text{naturlig død pga. overpopulasjon}}$$

Kan vise at systemet ikke har en analytisk løsning, men man kan vise at løsningen er periodisk.

Skal også diskutere høyere ordens ligninger, f.eks VAN-DER-POLs ligning:

$$u'' = \mu(1-u^2)u' - u, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_0'$$

Metodene vi skal definere er „én-steg-metoder":

- begynner i x_0 og velger en steglengde $h > 0$
- så bruker vi funksjonen f og verdien y_0 for å finne en approksimasjon y_1 i $x_1 := x_0 + h$.
- så gjentar vi disse stegene, men nå fra x_1 og verdien y_1.

Dvs:

- vi beregner approksimasjonen bare i diskrete tidspunkt $x_1, x_2, \dots$
- for å beregne y_{k+1} bruker vi bare y_k, men ikke $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots$

Eulers metode:

Vi har ODEen $\boxed{y' = f(x, y(x))}$, $\quad y(x_0) = y_0$.

⇝ kan gjøre en Taylorrekkeutvikling til $y(x)$:

$$y(x_0+h) = \underbrace{y(x_0)}_{y_0} + h\underbrace{y'(x_0)}_{=f(x_0,y_0)} + \frac{h^2}{2}y''(x_0) + \dots$$

$$= y_0 + h f(x_0, y_0) \underbrace{+ \frac{h^2}{2}y''(x_0) + \dots}_{\text{liten hvis } h \text{ er lite nok}}$$

$$\approx y_0 + h f(x_0, y_0) =: y_1$$

eller generelt: $\quad y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$.

⇒ Eulers metode:

Gitt $\vec{f}$, x_0 og $\vec{y}_0$

For $k = 0, 1, 2, \dots$:

- velg steglengde $h > 0$
- definer $x_{k+1} = x_k + h$ og $\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + h\vec{f}(x_k, \vec{y}_k)$.

Høyere ordens ODEer:

Anta at vi har en m-te ordens ODE

$$u^{(m)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m-1)}(x))$$

med initialbetingelser

$$u(x_0) = u_0,\ u'(x_0) = u_0',\ \dots,\ u^{(m-1)}(x_0) = u_0^{(m-1)}.$$

Vi kan skrive ligningen som et system ved å definere:

$$y_1 = u$$

$$y_2 = u',\quad y_3 = u'',\ \dots,\ y_m = u^{(m-1)}$$

og får da:

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 & y_1(x_0) &= u_0 \\
y_2' &= y_3 & y_2(x_0) &= u_0' \\
&\vdots & &\vdots \\
y_{m-1}' &= y_m & y_{m-1}(x_0) &= u_0^{(m-2)} \\
y_m' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_m), & y_m(x_0) &= u_0^{(m-1)}.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Kan bruke Eulers metoden på dette systemet.

F.eks: Van-der-Pols ligning:

$$u'' = \mu(1-u^2)u' - u, \quad u(0)=u_0, \; u'(0)=u_0'.$$

$\rightsquigarrow$ Skriver det om til: $[y = u, \; z = u']$

$$\boxed{y' = z}$$
$$z' = \mu(1-y^2)z - y, \qquad y(0) = u_0, \quad z(0) = u_0'$$

Og Eulers metode:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot z_k$$
$$z_{k+1} = z_k + h \cdot [\mu(1-y_k^2)z_k - y_k]$$

Får approksimasjonen $y_k \approx u(x_k)$

$z_k \approx u'(x_k)$

Feilanalyse:

Vi antar at vi vil løse ligningen på intervallet $[x_0, x_{end}]$ og vil undersøke feilen i x_{end} og hvordan den er avhengig av steglengden.

Vi velger faktisk antall steg N og definerer steglengden

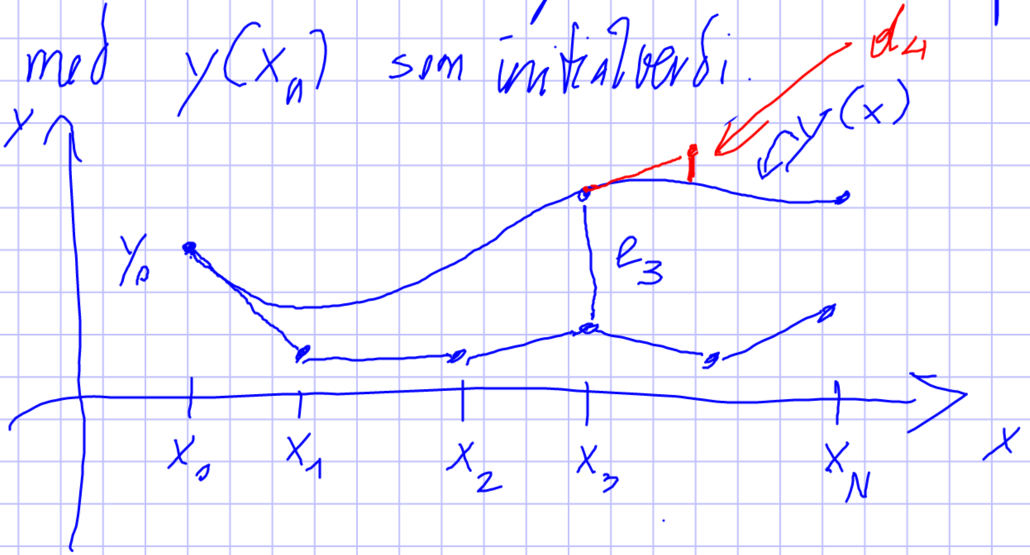
$$h = \frac{x_{end} - x_0}{N}.$$

Vil finne feilen $y(x_{end}) - y_N = e_N$.

Har to forskjellige typer av feil:

- den globale feilen i punktet x_n
$$e_n = y(x_n) - y_n$$

- den lokale trunkeringsfeilen d_{n+1}, som vi gjør hvis vi bruker en steg av metoden i punktet x_n med $y(x_n)$ som initialverdi.



Vi får at:

$$d_{n+1} = y(\underbrace{x_n + h}_{= x_{n+1}}) - \left[y(x_n) + h f(x_n, y(x_n)) \right]$$

$$= y(x_n + h) - y(x_n) - h y'(x_n)$$

Taylor

$$= \frac{h^2}{2} y''(\xi) \text{ for en } \xi \in [x_n, x_{n+1}].$$

$$\Longrightarrow \boxed{d_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi)}$$