Matematikk 4N - 20. oktober

Numerisk integrasjon

Skal diskutere den numeriske approksimasjonen av integraler

$$I[f](a,b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

hvor $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.

For å gjøre det skal vi bruke kvadraturregler på formen

$$Q[f](a,b) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i).$$

- w_i ... vekt, $w_i \in \mathbb{R}$.
- x_i ... nodepunkt, $x_i \in [a,b]$.

I praksis bruker vi sammensatte kvadraturregler:

Vi velger først en partisjon $a = X_0 < X_1 < \dots < X_m = b$, bruker kvadraturregelen på hvert delintervall $[X_j, X_{j+1}]$

og summerer opp:

$$I[f](a,b) = \sum_{j=0}^{m-1} I[f](X_j, X_{j+1}) \approx \sum_{j=0}^{m-1} Q[f](X_j, X_{j+1}).$$

Notasjon: skal vanligvis skrive $I(a,b)$, $Q(a,b)$, hvis det er klart hvilke funksjon vi integrerer over.

- Kvadraturregler og polynominterpolasjon

Vi antar at vi er gitt nodepunkt $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$.

La p_n være interpolasjonspolynomet gjennom $(x_i, f(x_i))$,

dvs $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell_i(x)$

med $$\ell_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$\longrightarrow$ Integrerer nå p_n istedenfor f:

$$I[f](a,b) \approx I[p_n](a,b) = \int_a^b p_n(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)\,dx =: \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i =: Q[f](a,b)$$

med $\boxed{w_i = \int_a^b \ell_i(x)\,dx}$

F.eks.: $[a,b] = [0,1]$ med nodepunkt $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Kardinalfunksjoner er:

$\ell_0(x) = 1 - x \quad \Rightarrow w_0 = \int_0^1 (1-x)\,dx = 1/2$

$\ell_1(x) = x \quad \Rightarrow w_1 = \int_0^1 x\,dx = 1/2$

$\Rightarrow$ får trapesregelen:

$$T(0,1) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right).$$

F.eks.: $I = [0,1]$, $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.

„Gauß-Legendre regel med 2 noder")

$\Rightarrow \ell_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\quad w_0 = \int_0^1 \ell_0(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

$\ell_1(x) = \sqrt{3}x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. $\quad w_1 = 1/2$.

$$\rightsquigarrow Q(0,1) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)$$

F.eks.: $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ og $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366\ldots$

Da får vi: $T(0,1) = \frac{1}{2}\left(\cos 0 + \cos \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Gauß-Legendre:

$$Q(0,1) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)\right)$$

$$\approx 0{,}6356\ldots$$

$\Rightarrow$ får en mye bedre approksimasjonen.

Teoretisk bakgrunn:

Definisjon: En kvadraturregel Q har presisjonsgrad d, hvis:

- $Q[p](a,b) = I[p](a,b)$ for alle $p \in \mathbb{P}_d$.
- Det finnes et polynom $p \in \mathbb{P}_{d+1}$ slik at

$$Q[p](a,b) \neq I[p](a,b).$$

Ekvivalent: $Q[x^j](a,b) = I[x^j](a,b)$ for $j = 0, \ldots, d$

$$Q[x^{d+1}](a,b) \neq I[x^{d+1}](a,b).$$

Man kan vise at:

- presisjonsgraden til trapesregelen er $d = 1$.
- presisjonsgraden til Gauß-Legendre-regelen er $d = 3$.
- Generelt: hvis Q er en kvadraturregel definert med polynominterpolasjen i $n+1$ noder, er presisjonsgrad minst n.

- Skal nå bruke Simpsonregelen for å diskutere hvordan å konstruere og analysere kvadraturen.

- Vi begynner på et referanseintervall $[-1, 1]$ hvor vi velger noder og beregner vekt.

Med Simpsons regel får vi nodepunkt

$$t_0 = -1, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = +1$$

$\Rightarrow$ får kardinalfunksjoner

$$\ell_0(t) = \frac{t(t-1)}{2}, \quad \ell_1(t) = \frac{(t+1)(t-1)}{-1}, \quad \ell_2 = \frac{(t+1) \cdot t}{2}$$

$$\Rightarrow \quad w_0 = \int_{-1}^{1} \ell_0(t)\,dt = \dots = 1/3$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} \ell_1(t)\,dt = 4/3$$

$$w_2 = \int_{-1}^{1} \ell_2(t)\,dt = 1/3 .$$

Får kvadraturregelen (Simpsons regel):

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx S[f](-1,1) = \frac{1}{3}\left[f(-1) + 4f(0) + f(1)\right]$$

Kan sjekke at presisjonsgrad er $d = 3$.

- Nå bruker vi definisjonen på referanseintervallet for å transportere regelen til et vilkårlig intervall.

For dette bruker vi den lineære transformasjonen

$$x = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{b+a}{2}, \quad dx = \frac{b-a}{2}\,dt .$$

$\rightsquigarrow$ får noder: $\quad x_0 = a, \quad x_1 = \frac{b+a}{2}, \quad x_2 = b .$

Kvadraturen blir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}\,dt$$

$$\approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right]$$

variabeltransformasjon:

$$x \rightarrow \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

$$dx \rightarrow \frac{b-a}{2}\,dt$$

- Sammensatt Simpsonregel

For nå: skal bruke en partisjon i m delinterintervaller med samme lengde.

For å få en enklere notasjon definerer vi:

$$x_j = a + hj \quad \text{med } h = \frac{b-a}{2m}, \; j = 0, \dots, 2m$$

og bruker delintervallene $[x_{2j}, x_{2j+2}]$.

Da får vi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} f(x)\,dx$$

$$\approx \sum_{j=0}^{m-1} S[f](x_{2j}, x_{2j+2})$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_{2j+2} - x_{2j}}{6} \left(f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2}) \right)$$

$x_{2j+2} - x_{2j} = 2h$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h}{3} \left(f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2}) \right)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + f(x_{2m}) + 4\sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2j+1}) \right]$$

$$=: S_m[f](a, b)$$

sammensatt Simpsonregel med m like delintervaller.

Feilanalyse til Simpsons regel:

Først: enkel Simpsonregel på $[a, b]$.

Vi definerer $c := \frac{a+b}{2}$, $h = \frac{b-a}{2}$

Bruker Taylorutvikling til f rundt c.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx = \int_{-h}^{h} f(c+s)\,ds$$

$$= \int_{-h}^{h} f(c) + s f'(c) + \frac{s^2}{2} f''(c) + \frac{s^3}{6} f'''(c)$$

$$+ \frac{s^4}{24} f^{iv}(c) + \dots \; ds$$

$$= 2h\, f(c) + 0 + \frac{h^3}{3} f''(c) + 0$$

$$+ \frac{h^5}{60} f^{iv}(c) + \dots$$