Matematikk 4N – 9. oktober

Numerisk løsning av ikke-lineære ligninger

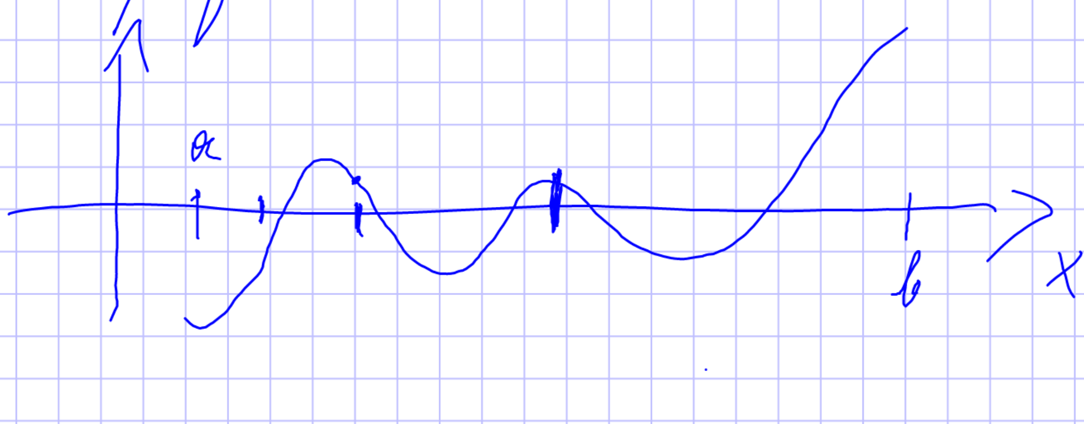
Anta at $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vil finne en løsning av

$$f(x) = 0$$

dvs en rot til funksjonen f.

Husk fra Matte 1: Hvis $f \in \mathcal{C}([a,b])$ og at $f(a)$ og $f(b)$ har ulike fortegn ($\Leftrightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$), så har f en rot i intervallet $[a,b]$.

Hvis $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ og enten $f'(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$ eller $f'(x) < 0 \ \forall x \in [a,b]$, så er roten entydig.



$\rightsquigarrow$ Biseksjonsmetoden:

Gitt: funksjon f [f kontinuerlig]
$a < b$ slik at $f(a) \cdot f(b) < 0$

Initialiser: $a_0 := a$, $b_0 := b$, $k = 0$.

For $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$c_k := \frac{a_k + b_k}{2}$$

Hvis $f(a_k) \cdot f(c_k) \leq 0$

$$a_{k+1} = a_k$$
$$b_{k+1} = c_k$$

ellers

$$a_{k+1} = c_k$$
$$b_{k+1} = b_k$$

Output: et intervall $[a_k, b_k]$ s.a. f har en rot i $[a_k, b_k]$.

Fra konstruksjonen: $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$

$\Longrightarrow$ feilen er mindre enn $\frac{b-a}{2^k}$

Dvs: vi har en lineær konvergent metode for å approksimere en løsning av ligningen $f(x)=0$, og feilen halveres i hvert steg.

Problem med metoden:

- metoden konvergerer lineært
- metoden funker bare for én ligning i én variable

Fikspunktiterasjonen:

Grunnleggende idé: skriv ligningen $f(x)=0$ om til en fikspunktligning $g(x)=x$.

[f.eks: $g(x)=x+f(x)$, eller $g(x)=x-f(x)$]

Vil finne et fikspunkt til funksjonen g. Dvs en x s.a. $g(x)=x$.

Fikspunktiterasjon:

Input: funksjon g, initialisering $x_0 \in \mathbb{R}$.

For $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

Output: et punkt x_k.

Fikspunktteorem: Anta at $[a,b] \subset \mathbb{R}$ og $g \in C^1([a,b])$ er slik at $g([a,b]) \subset [a,b]$ (dvs: $a \leq g(x) \leq b$ for alle $x \in [a,b]$).

Anta i tillegg at det finnes en $0 < L < 1$ slik at

$$|g'(x)| \leq L \quad \text{for alle } x \in [a,b].$$

Da har vi at:

- g har et entydig fikspunkt $r \in [a,b]$
- fikspunktiterasjonen konvergerer til r for alle $x_0 \in [a,b]$.
- $|x_{k+1} - r| \leq L |x_k - r|$

- $$|x_k - r| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$$

„a-priori feilestimat"

- $$|x_k - r| \leq \frac{L}{1-L} \cdot |x_k - x_{k-1}|$$

„a-posteriori feilestimat"

Bevisidé:

- Eksistens og entydighet:

Har at $g(a) \geq a$ og $g(b) \leq b$

eller: $g(a) - a \geq 0$ og $g(b) - b \leq 0$

$\Rightarrow$ det finnes $a \leq x \leq b$ s.a. $g(x) - x = 0$.

I tillegg er funksjonen $h(x) := g(x) - x$ synkende siden $h'(x) = \underbrace{g'(x)}_{\leq L} - 1 \leq L - 1 < 0$.

$\Rightarrow$ har et entydig punkt r med $g(r) - r = 0$.

• Vi har at

$$\boxed{|x_k - r|} = |g(x_{k-1}) - g(r)|$$

def. av iterasjonen

r er et fikspunkt

$$= \left| \int_r^{x_{k-1}} g'(s)\,ds \right| \leq \int_r^{x_{k-1}} \underbrace{|g'(s)|}_{\leq L}\,ds$$

$$\leq \int_r^{x_{k-1}} L\,ds = \boxed{L|x_{k-1} - r|}$$

$$\Longrightarrow \quad |x_k - r| \leq L|x_{k-1} - r|$$

$$\leq L^2 |x_{k-2} - r|$$

$$\leq L^3 |x_{k-3} - r| \leq \ldots$$

$$\ldots \leq L^k |x_0 - r|$$

Men: $0 < L < 1 \Longrightarrow L^k \longrightarrow 0$.

Dvs at: $|x_k - r| \leq L^k |x_0 - r| \longrightarrow 0$

$$\Longrightarrow \quad x_k \longrightarrow r.$$

Eksempel: ligningen $\underbrace{x^3+x^2-3x-3}_{f(x)}=0$

har løsningene $r=-1$, $r=-\sqrt{3}$, $r=+\sqrt{3}$.

En mulighet for å skrive det som fikspunktligning er

som: $$\underbrace{\frac{x^3+x^2-3}{3}}_{g(x)}=x$$.

Her: $g'(x)=x^2+\frac{2}{3}x$

og man kan vise at: $g\left(\left[-4/3,-2/3\right]\right)\subseteq\left[-4/3,-\frac{2}{3}\right]$

og $|g'(x)|\leq 8/9 \quad \forall x\in\left[-4/3,-2/3\right]$

$\rightsquigarrow$ fikspunktiterasjonen konvergerer for alle $x_0\in\left[-4/3,-\frac{2}{3}\right]$

med $L=8/9$.

Man kan vise at: fikspunktiterasjonen konvergerer mot en løsning r av $g(r) = r$, hvis $|g'(r)| < 1$ og x_0 er nærme nok til r.

I tillegg er konvergensen (minst) lineær med en konstant $L \approx |g'(r)|$

$\Longrightarrow$ jo mindre $|g'(r)|$ er, desto raskere konvergerer iterasjonen.

[Hvis $|g'(r)| > 1$, konvergerer iterasjonen <u>ikke</u> mot r]

Newtons metode:

Fra diskusjonen før ser vi at vi burde velge g slik at $|g'(r)|$ er så lite som mulig.

Eller: at $g'(r) = 0$.

Vi begynner nå med ligningen $f(x) = 0$.

$\rightsquigarrow$ gang dette med en funksjon $h(x)$ og legg til x. $\Rightarrow$ får ligning

$$g(x) = x + h(x) \cdot f(x) \overset{!}{=} x$$

Antar at r er en røt til f. Vil finne h slik at $g'(r) = 0$.

$$\text{Men: } g'(r) = 1 + h'(r)\underbrace{f(r)}_{=0} + h(r) f'(r)$$

$$= 1 + h(r) f'(r) \overset{!}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$ Vi må velge h slik at $h(r) = -\dfrac{1}{f'(r)}$.

$\Rightarrow$ Kan velge $h(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$.

$\Rightarrow$ Får fikspunktligning

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

og fikspunktiterasjonen blir:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

„Newton iterasjon"

Teorem: Anta at $f'(r) \neq 0$ og at det finnes $\delta > 0$ og $M > 0$ s.a.:

- $f \in C^2([r-\delta, r+\delta])$
- $\left| \frac{f''(y)}{f'(x)} \right| \leq 2M$ for alle x, y med $x, y \in [r-\delta, r+\delta]$.

Da konvergerer Newtons metode kvadratisk mot r

med $|x_{k+1} - r| \leq M |x_k - r|^2$

for alle x_0 s.a. $|x_0 - r| \leq \min\{\delta, 1/M\}$.