30.9.19

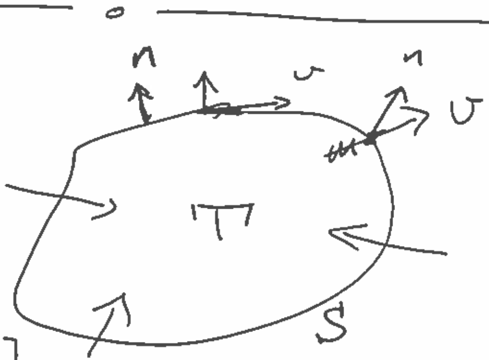
Avsn. 12.5 Varmeledningsligningen

De tre viktigste ligningene: Bølgeligningen, Varmeledn., Laplaces ligning

---

Varmeledning

varmeledende materiale



u = temperatur [K]
$= u(x,y,z,t)$

K = varmeledningsevnen $\left[\frac{W}{mK}\right]$

ρ = massetetthet $[kg/m^3]$

σ = spesifikk varme $[J/kgK]$

(konstanter: K, ρ, σ)

$c^2 = K/\rho\sigma$ termisk diffusivitet $[m^2/s]$

Fysiske lover: (1) Newtons avkjølingslov

$$v = -K\nabla u$$

varmeledning

(2) Energibevaring

Total energi i T: $H(t) = \iiint_T \rho\sigma u \, dx\,dy\,dz$

Varme som strømmer ut av legemet:

$$\iint_S v\cdot n \, dA$$

Energibevaring:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\iint_S v\cdot n \, dA$$

$$= - \iint_S (-K) \nabla u \cdot n \, dA$$

$$= K \iint_S \nabla u \cdot n \, dA = K \iiint_T \operatorname{div} \nabla u \, dx\,dy\,dz$$

Gauss' teorem
divergensteoremet

$$= K \iiint_T \nabla^2 u \, dx\,dy\,dz$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \text{gradient (nabla)}$$

$$\operatorname{div} \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u = \Delta u$$

Laplace-operatoren

$$\frac{\partial H}{\partial t} = K \iiint_T \Delta u \, dx\,dy\,dz$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_T \rho \sigma u \, dx\,dy\,dz = \iiint_T \rho \sigma \frac{\partial u}{\partial t} \, dx\,dy\,dz$$

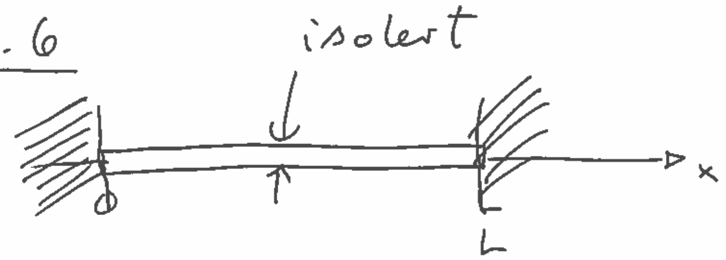
dvs:

$$\iiint_T \left[\rho \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - K \Delta u \right] dx\,dy\,dz = 0$$

Dette gjelder for alle områder T. Da må integranden være null. Altså

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\frac{K}{\rho \sigma}}_{c^2} \Delta u = c^2 \Delta u$$

Avsnitt 12.6



u = temperaturen $= u(x,t)$

Varmeledningsligningen: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

Konstant temperatur for $x=0$ og $x=L$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Initiell temperatur $u(x,0) = f(x)$

Vi må ha at $f(0) = f(L) = 0$

sep. av variable

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

intitial betingelse → ($u(x,0) = f(x)$)

randbetingelse → ($u(0,t) = u(L,t) = 0$) ← Dirichlet rand bet.

Separasjon av variable

Antar $u(x,t) = G(t)\,F(x)$

Innsatt i ligningen:

$$\dot{G} F = c^2 G F''$$

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

Venstresiden avhenger bare av t, mens høyresiden bare avhenger av x. Vi skal ha likhet for <u>alle</u> (x,t). Da må venstresiden = høyresiden = konstant $= k$

Vi har
$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \boxed{\frac{F''}{F} = k}$$

Vi har også $u(x,t) = G(t)F(x)$ med

Dirichlet randbet. $\underset{= G(t)F(0)}{u(0,t)} = \underset{= G(t)F(L)}{u(L,t)} = 0$

Da må $\boxed{F(0) = F(L) = 0}$

Tre tilfeller:

$k > 0$

$k = 0$

$k < 0$

$\underline{k=0}$: $\quad \frac{F''}{F} = 0 \ , \ F(0) = F(L) = 0$

Det gir $\quad F(x) = \alpha x + \beta$

$$0 = F(0) = \beta \ , \quad 0 = F(L) = \alpha L$$

som gir: $\underline{F(x) = 0}$

$\underline{k>0}$: ($k = p^2$) $\quad F'' = p^2 F \ , \quad F(0) = F(L) = 0$

som gir $\quad F(x) = \alpha \sinh px + \beta \cosh px$

$$0 = F(0) = \beta \ , \quad 0 = F(L) = \alpha \sinh pL$$

som gir at $\quad \underline{F(x) = 0}$

$\underline{k<0}$: ($k = -p^2$) $\quad F'' = -p^2 F \ , \quad F(0) = F(L) = 0$

$$F(x) = \alpha \sin px + \beta \cos px$$

$$0 = F(0) = \beta \ , \quad 0 = F(L) = \alpha \sin pL$$

Da må $\quad pL = n\pi \ , \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Det gir: $\quad \underline{F_n(x) = \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} x}$

Vi hadde $$\frac{\dot G}{c^2 G} = k = -p^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

eller $$\dot G^n = -c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G = -\lambda_n^2 G$$

med løsning $$G_n(t) = \gamma_n e^{-\lambda_n^2 t}$$

Altså $$u(x,t) = F_n(x)\,G_n(t) = \underbrace{\gamma_n \alpha_n}_{B_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

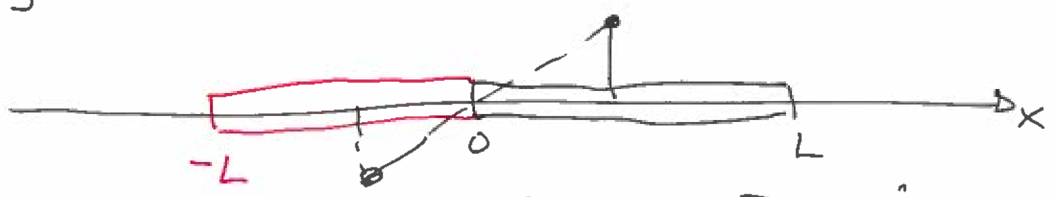
Da vil også $$\sum u_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

oppfylle ligningen + Dirichlet rand. bet. (antatt at rekken konvergerer!)

Initialbetingelsen:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Utvider f til å være definert på $[-L, L]$ ved å sette $f(-x) = -f(x)$



Da blir F-rekken til f en F-sinus-rekke

og $$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)}_{\text{odde}} \underbrace{\sin\frac{n\pi x}{L}}_{\text{odde}}\,dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Dvs at løsningen av

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

er gitt ved:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

der

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$\lambda_n = c \frac{n\pi}{L}$$

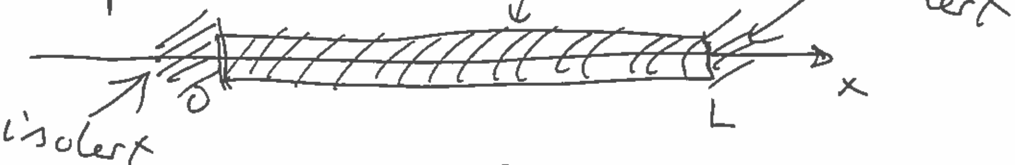
Sep av variable

① Anta $u(x,t) = G(t)F(x)$
$+$ rand. bet.

② Finner spesialløsninger

③ Summerer alle spesialløsn. og tilpasser initial bet.

Vi skal løse problemet



$$u_t = c^2 u_{xx}$$

Neumann rand. bet. $\rightarrow u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$

$$u(x,0) = f(x)$$

Sep av variable:

Anta $u(x,t) = G(t)F(x)$

$$\dot{G} F = c^2 G F''$$

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

Rand bet:

$$u_x(0,t) = G(t)F'(0) = 0$$
$$u_x(L,t) = G(t)F'(L) = 0$$

som gir
$$\begin{cases} F'(0) = F'(L) = 0 \\ F'' = kF \end{cases}$$

$\underline{k=0}$:
$$F(x) = \alpha x + \beta \quad , \quad F'(x) = \alpha = 0$$

Da må $F(x) = \beta$

$\underline{k>0}$: "p^2"
$$F(x) = \alpha \sinh px + \beta \cosh px$$
$$F'(x) = p\alpha \cosh px + \beta p \sinh px$$
$$0 = F'(0) = p\alpha \cancel{\cosh} \Rightarrow \alpha = 0$$
$$0 = F'(L) = \beta p \sinh pL \Rightarrow \beta = 0$$

dvs $F(x) = 0$

$\underline{k<0}$: "$-p^2$"
$$F(x) = \alpha \sin px + \beta \cos px$$
$$F'(x) = \alpha p \cos px - \beta p \sin px$$
$$0 = F'(0) = \alpha p \Rightarrow \alpha = 0$$
$$0 = F'(L) = -\beta p \sin pL \Rightarrow pL = n\pi$$

Det gir $\underline{F_n(x) = \beta_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$

Som tidligere får vi
$$G_n(t) = \gamma_n e^{-\lambda_n^2 t}$$
der $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}c$

Da blir
$$u_n(x,t) = \underbrace{\beta_n \gamma_n}_{A_n} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$
$n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Generell løsn:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi x}{L} \, e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$= \underline{B_0} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 t} \to 0$$

Initialbet:

$$f(x) = u(x,0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Vi utvider f som en <u>like</u> funksjon på intervallet $[-L, L]$. Da blir F-rekken til f en F-cosinus-rekke der

$$B_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Vi ser at $\underline{u(x,t) \to B_0}$ når $t \to \infty$

<u>(Ned s. 563)</u>