18.11.19

Oppg 6, des 2018

a) $$\int_1^2 x\ln x \, dx \approx Q(1,2) = \frac{3h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$$

der $h = (b-a)/3 = (2-1)/3 = 1/3$

$x_1 = a+h = 1 + 1/3 = 4/3$

$x_2 = a + 2h = 1 + 2/3 = 5/3$

og $f(x) = x \ln x$

Det gir

$$\int_1^2 x\ln x \, dx \approx \frac{3}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\ln(4/3) + \frac{5}{3}\ln(5/3)\right)$$

$$= 0.6174$$

b) $[a,b] = [-1,1]$. Presisjonsgraden er d der

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = Q(x^k, -1, 1) \quad \text{for } k = 0, \dots, d$$

$$\int_{-1}^{1} x^{d+1} dx \neq Q(x^{d+1}, -1, 1)$$

$h = \frac{1-(-1)}{3} = 2/3$

$x_1 = -1 + h = -1/3$

$x_2 = -1 + 2h = 1/3$

$$\int_{-1}^{1} x^0 dx = \int_{-1}^{1} 1 \, dx = 2 \qquad Q(x^0) = \frac{3}{2}\left(\frac{1-(-1)}{3}\right)\left(\cancel{f(-1/3)+f(1/3)}\right)$$

$$= f(-1/3) + f(1/3) = 2$$

$$\int_{-1}^{1} x \, dx = 0 \qquad Q(x^1) = f(-1/3) + f(1/3) = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3} - (-1/3) = \frac{2}{3}, \quad Q(x^2) = f(-1/3) + f(1/3) = 2/9$$

Presisjonsgraden $d = 1$

Oppg 7

a)
$$x_0 = 2.5$$
$$x_{k+1} = \frac{1}{8x_k^3}\left(3x_k^4 + 24x_k^2 - 16\right)$$

$$|x_{new} - x| \leq Tol \longrightarrow \text{slutt}$$

$$\longrightarrow |x_{k+1} - x_k| \leq \underset{\uparrow \text{ gitt}}{Tol}$$

$$\longrightarrow |x_k - r| \leq Tol \longrightarrow x_k \to r$$

b) $e_k = |r - x_k|$

Raten er p dersom $e_{k+1} \approx \underset{\uparrow \text{ konst.}}{C}\, e_k^p$

Gitt $e_1, \dots, e_4$. Vi har

$$e_{k+1} \approx C e_k^p$$
$$e_{k+2} \approx C e_{k+1}^p$$

Da blir:
$$\frac{e_{k+1}}{e_{k+2}} \approx \left(\frac{e_k}{e_{k+1}}\right)^p$$

som gir:
$$p \approx \frac{\ln(e_{k+1}/e_{k+2})}{\ln(e_k/e_{k+1})}$$

Setter inn for $k = 1, 2, 3$, og finner $p \approx 3$

Oppg 8

a) Metoden er gitt ved:

$$\begin{cases} K_1 = F(x_n, Y_n) \\ K_2 = F(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2} K_1) \\ Y_{n+1} = Y_n + h K_2 \end{cases}$$

der $0 < h \ll 1$.

$$(*) \begin{cases} y_1' = y_1 + x y_2^2 \\ y_2' = y_1 y_2 \\ y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = -1 \end{cases}$$

der $h = 0.1$. Vi skriver

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_1 + x y_2^2 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Da er $(*)$ ekvivalent med

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(1) = Y_0$$

Gitt $h = 0.1$ og $x_0 = 1$, $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vi får:

$$K_1 = F(x_0, Y_0) = \begin{pmatrix} 1 + 1(-1)^2 \\ 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = F(x_0 + \tfrac{h}{2}, Y_0 + \tfrac{h}{2} K_1)$$

$$Y_0 + \frac{h}{2} K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.05 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ -1.05 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1.1 + 1.05(-1.05)^2 \\ 1.1 \cdot (-1.05) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.258 \\ -1.155 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = Y_0 + 0.1 K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 2.258 \\ -1.155 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.225 \\ -1.125 \end{pmatrix}$$

b) Gitt ligningen $y' = \lambda y, \quad \lambda < 0$

og ønsker å finne $y_{n+1} = R(z)\, y_n$

der $z = h\lambda$

Vi har:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \tfrac{h}{2},\, y_n + \tfrac{h}{2} k_1)$$
$$y_{n+1} = y_n + h k_2$$

som gir:

$$k_1 = \lambda y_n$$
$$k_2 = \lambda(y_n + \tfrac{h}{2} k_1) = \lambda(y_n + \tfrac{h}{2}\lambda y_n)$$
$$= \lambda(1 + \tfrac{z}{2})\, y_n$$
$$y_{n+1} = y_n + h\lambda(1 + \tfrac{z}{2})\, y_n$$
$$= (1 + z + z^2/2)\, y_n$$

dvs $R(z) = 1 + z + z^2/2$. Stabilitetsintervallet er $S = \{ z \mid |R(z)| \le 1 \}$

$$R(z) = \tfrac{1}{2}(z+1)^2 + 1/2 \le 1, \text{ eller } (z+1)^2 \le 1$$

dvs $S = [-2, 0]$.

Oppg 9

$$u'' + 2u = x^2 \quad , \quad x \in [0,1]$$
$$u'(0) + u(0) = 0$$
$$u(1) = 2$$

La $N \in \mathbb{N}$ og $h = 1/N$ og $x_i = ih$ for $i = 0, 1, 2, \dots, N$

La $v_i \approx u(x_i)$ for $i = 0, \dots, N$

Standard symmetrisk approksimasjon av u'' gir:

$$(1) \quad \frac{1}{h^2}\left(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}\right) + 2v_i = x_i^2$$

for $i = 1, \dots, N-1$

$x = 1$ $\qquad v_N = 2$

$x = 0$ $\qquad$ Innfører fiktivt pkt v_{-1} og

får:

$$\frac{v_1 - v_{-1}}{2h} + v_0 = 0$$

som en diskretisering av $u'(0) + u(0) = 0$

Setter inn i lign (1) for $i = 0$ og får:

$$(2) \quad v_1 - 2v_0 + v_{-1} + 2h^2 v_0 = x_0^2 h^2 = 0$$

Vi får: $\qquad v_{-1} = 2hv_0 + v_1$

som settes inn i lign (2):

$$v_1 - 2v_0 + (2hv_0 + v_1) + 2h^2 v_0 = 0$$

eller:

$$(-2 + 2h + 2h^2)v_0 + 2v_1 = 0$$

Vi får følgende ligningssett:

$$\begin{cases} -2(1-h-h^2)U_0 + 2U_1 = 0 \\ U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1} + 2h^2 U_i = x_i^2 h^2 \\ \qquad\qquad\qquad i=1,\dots,N-1 \\ U_N = 2 \end{cases}$$

Vi kan skrive dette som

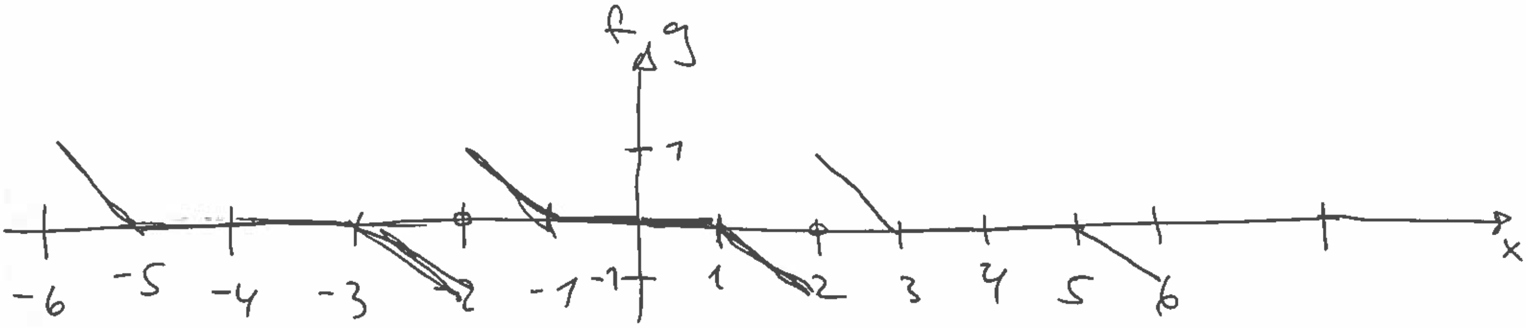
$$AU = b$$

der A er en $(N+1)\times(N+1)$ matrise og b en $(N+1)$ vektor.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2(1-h-h^2) & 2 & 0 & & & 0 \\ 1 & -2(1-h^2) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & & & & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ h^2 x_1^2 \\ h^2 x_2^2 \\ \vdots \\ h^2 x_{N-1}^2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

Oppg 1, Mai 2017

$f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \le 1 \\ 1-x & 1 < x \le 2 \end{cases}$



$g(x) = -g(-x)$, $g(x+4) = g(x)$

Fourier-rekken til g er gitt ved

$a_n = 0$

$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx$

$= \frac{2}{2}\int_{0}^{2} g(x) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx$

$= \int_{1}^{2} (1-x) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx$

$= \int_{1}^{2} \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx - \int_{1}^{2} x \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx$

$= -\Big|_1^2 \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \Big|_1^2 \frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2}$

$- \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx$

$= -\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\left(2\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}\right)$

$-\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \Big|_1^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \cancel{\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}} + \frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) - \cancel{\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}}$$

$$- \frac{4}{(n\pi)^2}\Big(\overset{=0}{\cancel{\sin n\pi}} - \sin\frac{n\pi}{2}\Big)$$

$$= \frac{2}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} = b_n$$

Det gir:

$$\underline{g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}$$

Vi har at F-rekken til g konvergerer mot g for alle $x \in (-2,2)$.

I $x=2$ konvergerer F-rekken mot middelverdien av spranget, dvs 0.

I $x=-2$ konverger F-rekken også mot 0.

Siden g er kontinuerlig deriverbar på $(-2,2)$ (unntatt i $x = \pm 1$, men der er betingelsene i teoremet oppfylt)