4.11.19

Stive differensialligninger

Ligninger som er numerisk ustabile med mindre man bruker svært korte skritt.

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{Løsning: } y(x) = y_0 e^{\lambda x}$$

Anta $\lambda < 0$. Da vil $y(x) \to 0$ når $x \to \infty$

Eulers metode: $x_n = nh \qquad 0 < h << 1$

$y_n \approx y(x_n)$

$y' = f(x,y)$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$
$$= y_n + h\lambda y_n = (1 + \underbrace{\lambda h}_{z}) y_n$$
$$= (1+z) y_n$$

Ønsker at $y_n \to 0$ når $x_n \to \infty$

Vi skriver $y_{n+1} = R(z) y_n$ (For Euler er $R(z) = 1+z$)

$|R(z)| < 1 \implies |y_{n+1}| < |y_n|$ Stabil

$|R(z)| = 1 \implies |y_{n+1}| = |y_n|$

$|R(z)| > 1 \implies |y_{n+1}| > |y_n|$ Ustabil

Vi har $|y_{n+1}| = |R(z)||y_n| = \dots = |R(z)|^{n+1} y_0$

Vi ser at om $|R(z)| < 1$, vil $y_n \to 0$ når $x_n \to \infty$

For Eulers metode er $R(z) = 1 + z$

og vi må ha

$$|1 + z| < 1$$

eller

$$-1 < 1 + z < 1$$

som vil si

$$\underline{z \in (-2, 0)}$$

Eks $\lambda = -10$

$$y' = -10y$$
$$y(0) = y_0$$

Da må $z = \lambda h = -10h \in (-2, 0)$

som betyr at $0 < h < 1/5$

Vi definerer stabilitetsområdet

$$S = \{ z \in \mathbb{R} \mid |R(z)| \leq 1 \}$$

Eulers metode: $S = [-2, 0]$

Heuns metode:
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$u_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(\underset{\substack{\uparrow \\ y_{n+1}}}{x_{n+1}}, u_{n+1}) \right)$$

Her er $f = \lambda y$. Det gir:

$$u_{n+1} = y_n + h\lambda y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(\lambda y_n + \lambda \overbrace{(y_n + h\lambda y_n)}^{u_{n+1}} \right)$$

$$= y_n + \frac{h\lambda}{2}(1 + 1 + h\lambda)\, y_n$$

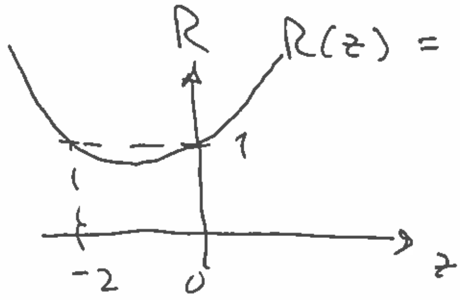
$$= \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right) y_n$$

$$= \left(1 + z + \tfrac{1}{2} z^2\right) y_n \quad \text{der } z = \lambda h$$

$$= R(z)\, y_n$$

Altså
$$y_{n+1} = R(z)\, y_n$$

Må kreve at $|R(z)| < 1$ for stabilitet.



$$R(z) = \tfrac{1}{2} z^2 + z + 1 = \tfrac{1}{2}(z+1)^2 + \tfrac{1}{2} < 1$$

$$(z+1)^2 < 1$$

eller $\quad |z+1| < 1$

eller $\quad z \in (-2, 0)$

Det beste hadde vært om

$$(-\infty, 0] \subset S$$

Slike metoder kalles $A(0)$ stabile.
Da ville alle $h > 0$ gitt stabilitet!

$$y_{n+1} = R(z)\, y_n$$

Eksplisitte metoder gir polynomisk $R(z)$, og $|R(z)| \to \infty$ når $z \to -\infty$
Eksplisitte metoder kan aldri være $A(0)$ stabile.

Eksempel

Baklengs Euler: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{\underline{n+1}})$$

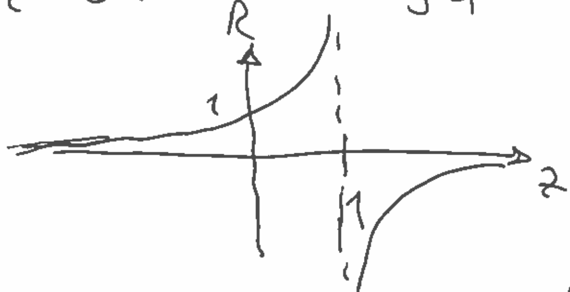
La $f = \lambda y$. Da blir:

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{\underline{n+1}}$$

$$(1-z) y_{n+1} = y_n \quad \text{der } z = \lambda h$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-z} y_n = R(z) y_n$$

Her er $R(z) = \dfrac{1}{1-z}$



Her er $S = (-\infty, 0]$ og baklengs Euler er $A(0)$ stabil.

Vi har bare sett på én ligning, nemlig

$$y' = \lambda y \quad \lambda < 0$$

Lineære systemer

$$\longrightarrow \quad \underline{y' = Ay + g(x)}$$

der A er en $m \times m$ matrise med konstante koeffisienter. Vi har

$$y = (y_1, \dots, y_m)^T, \quad g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$$

Antar at A er diagonaliserbar, dvs

$$\longrightarrow \quad \underline{A v_i = \lambda_i v_i} \qquad i = 1, \dots, m.$$

Definerer matrisen $V = [v_1 \dots v_m]$

Da gjelder: $\underline{AV = V\Lambda}$

der $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$

$$AV = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\lambda_1, & v_2\lambda_2 & \dots & v_m\lambda_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$$= V\Lambda$$

Vi har

$$y' = Ay + g$$

$$\cancel{Vy' = V \underbrace{AV^{-1}V}_{I} y + Vg = V}$$

$$y' = Ay + g$$

$$\begin{aligned} V^{-1}y' &= V^{-1}Ay + V^{-1}g \\ &= V^{-1}A\underbrace{VV^{-1}}_{I}y + V^{-1}g \\ &= V^{-1}AV\,V^{-1}y + V^{-1}g \\ &= \underbrace{V^{-1}V}_{I}\Lambda V^{-1}y + V^{-1}g \\ &= \Lambda V^{-1}y + V^{-1}g \end{aligned}$$

Definer $z = V^{-1}y$. Da er $z' = V^{-1}y'$, og vi får:

$$\underline{z' = \Lambda z + q} \quad \text{der } q = V^{-1}g$$

som er det samme som:

$$\underline{z_i' = \lambda_i z_i + q_i} \quad , i = 1, \dots, m$$

løses som vi har lært tidligere.

Når vi har funnet $z = (z_1, \dots, z_m)^T$, blir

$$\underline{y = Vz}$$

Stabilitet krever at $R_i(z)$ i <u>hver</u> komponent er $|R_i(z)| < 1$

Eks

$$y_1' = -2y_1 + y_2 + 2\sin x$$
$$y_2' = (a-1)y_1 - ay_2 + a(\cos x - \sin x)$$
$$a > 0$$

Vi kan skrive:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ a-1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin x \\ a(\cos x - \sin x) \end{pmatrix}$$

$$= Ay + g$$

der $y = (y_1, y_2)^T$ og $g = (2\sin x, a(\cos x - \sin x))^T$

og

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ a-1 & -a \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ a-1 & -a-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-a-\lambda) - (a-1)$$

$$= (2+\lambda)(a+\lambda) - (a-1)$$
$$= \lambda^2 + (2+a)\lambda + 2a - (a-1)$$
$$= \lambda^2 + (2+a)\lambda + a + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-(2+a) \pm \sqrt{(2+a)^2 - 4(a+1)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-(2+a) \pm \sqrt{\cancel{4} + \cancel{4a} + a^2 \cancel{-4a} \cancel{-4}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-(2+a) \pm a\right) = \begin{cases} -1 \\ -(a+1) \end{cases}$$

Vi må ha stabilitet i begge komponenter. Hvis vi bruker forlengs Euler, er

$R = 1 + z$ med $|R(z)| < 1$, dvs $z \in (-2, 0)$

Her får vi

~~R_1~~ $z = -1h \in (-2, 0)$

dvs $\quad -2 < -h < 0$, eller $\quad 0 < h < 2$

$z = -(a+1)h$, $-2 < -(a+1)h < 0$

eller $\quad h < \frac{2}{a+1} < 2$

fordi $a > 0$

Dermed må vi kreve $\quad h < \frac{2}{a+1}$

$$y' = \lambda y \quad \lambda < 0$$

Partielle differensialligninger (PDE)

Varmeledning $\quad u_t = u_{xx}$

Bølgeligning $\quad u_{tt} - u_{xx} = 0$

Laplaces ligning $\quad u_{xx} + u_{yy} = 0$

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = r(x)$$

der $u = u(x)$ er ukjent, p, q, r er kjente. La $x \in [a, b]$,

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b \quad \text{gitt}$$

Ønsker å løse dette numerisk.

$$f'(x) \sim \frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big) \qquad 0 < h \ll 1$$

forlengs derivert

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\big(f(x) - f(x-h)\big)$$

baklengs derivert

$$f'(x) \sim \frac{1}{2h}\big(f(x+h) - f(x-h)\big)$$

symmetrisk derivert

Endelige differanser

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x) - f(x-h)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x-h)}{1} = f'(x)$$

Videre

$$f''(x) \sim \frac{1}{h^2}\left(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \right)$$

Sjekk med l'Hôpital!

Ønsker å estatte f' med differanser.
Hvilken feil gir vi?

Feilanalyse

$$e(x,h) = f'(x) - \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right)$$

mellom x og $x+h$

antar f 2ggr deriverbar

$$= \cancel{f'(x)} - \frac{1}{h}\left(\cancel{f(x)} + \cancel{hf'(x)} + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi) - \cancel{f(x)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} h f''(\xi) \quad \text{1. ordens metode}$$

Sentraldifferans:

$$e(x,h) = f'(x) - \frac{1}{2h}\left(f(x+h) - f(x-h)\right)$$

$$= f'(x) - \frac{1}{2h}\Big(f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f^{(3)}(\xi_1)$$
$$- \left(f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}(-h)^2 f''(x) + \frac{1}{6}(-h)^3 f^{(3)}(\xi_2)\right)\Big)$$

$$= \cancel{f'(x)} - \frac{1}{2h}\Big(\cancel{f(x)} + \cancel{hf'(x)} + \frac{1}{2}\cancel{h^2 f''(x)} + \frac{1}{6}h^3 f^{(3)}(\xi_1)$$
$$- \cancel{f(x)} + \cancel{hf'(x)} - \cancel{\frac{1}{2}h^2 f''(x)} + \frac{1}{6}h^3 f^{(3)}(\xi_2)\Big)$$

$$= \frac{h^2}{12}\left(f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2)\right) = \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\eta) \quad \text{2. ordens metode}$$