24.10.19

Ligningsløsning

Newtons metode $\qquad f(r) = 0$. Velg x_0

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$e_k = r - x_k$. Vi fant at

$$e_{k+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} e_k^2$$

Vi hadde:

$$\left|\frac{f''(x)}{f'(y)}\right| \leq 2M \quad \text{for alle } x, y \in I_\delta = (r-\delta, r+\delta)$$

som gir at

$$|e_{k+1}| \leq M |e_k|^2$$

når $|e_0| = |x_0 - r| \leq \min\{1/M, \delta\}$

$1/M$: for at metoden skal konvergere.

δ: for at $x_0 \in I_\delta$

Man kan vise $|e_k| \leq \frac{1}{M}(\underbrace{M e_0}_{<1})^{2^k}$

---

n ligninger med n ukjente

$$(1) \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

der $f_1, \ldots, f_n$ er kjente funksjoner, og $x_1, \ldots, x_n$ er de ukjente.

Lettere å skrive med vektornotasjon:

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \quad \text{der } x = (x_1, \ldots, x_n)$$

Da er (1) ekvivalent med

$$\underline{F(x) = 0}$$

---

2 ligninger med 2 ukjente

Gitt:

$$f(x,y) = 0$$
$$g(x,y) = 0$$

Finn (x,y).

Velg en verdi $(\hat{x}, \hat{y})$ og ~~ta~~ foreta en Taylor-utvikling:

$$f(x,y) = f(\hat{x},\hat{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},\hat{y})(x-\hat{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})(y-\hat{y}) + \ldots$$

$$g(x,y) = g(\hat{x},\hat{y}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x},\hat{y})(x-\hat{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})(y-\hat{y}) + \ldots$$

Anta nå at $(x,y) \approx (\hat{x},\hat{y})$ slik at vi kan droppe alle høyere ordens ledd i Taylor-rekken

Da får vi:

$$(2)\begin{cases} f(x,y) = f(\hat{x},\hat{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},\hat{y})(x-\hat{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})(y-\hat{y}) \\ g(x,y) = g(\hat{x},\hat{y}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x},\hat{y})(x-\hat{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})(y-\hat{y}) \end{cases}$$

Definer: $F = (f, g)^T$ og:

Jacobimatrisen $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f \\ \nabla g \end{pmatrix}$

Da er (2) ekvivalent med

$$F(x,y) = F(\hat{x},\hat{y}) + J(\hat{x},\hat{y})(X-\hat{X})$$

der $X = (x,y)^T$, $\hat{X} = (\hat{x},\hat{y})^T$

$$F(X) = F(\hat{X}) + J(\hat{X})(X-\hat{X})$$

Ønsker å løse ligningen $F(X)=0$, får vi:

$$0 = F(\hat{X}_k) + J(\hat{X}_k)(X_{k+1}-\hat{X}_k)$$

Dvs: La Δ_k løse

$$J(X_k)\Delta_k = -F(X_k)$$

og definer

$$X_{k+1} = X_k + \Delta_k$$

så kan vi håpe at $X_k \xrightarrow{k\to\infty} X$ der

$$F(X)=0$$

Vi MÅ ha at $J(X_k)$ er invertibel

Numerisk løsning av ordinære differensialligninger (ODE)

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Gitt funksjon f, og initialverdi x_0

Finn $y = y(x)$

Vi kan ha flere ligninger:

$$(3) \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, \dots, y_m) \end{cases}$$

Gitt initialverdier $y_1(x_0) = y_{1,0}, \dots, y_m(x_0) = y_{m,0}$

Innfører vektornotasjon:

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

der $F(x, Y) = (f_1(x, Y), \dots, f_m(x, Y))^T$

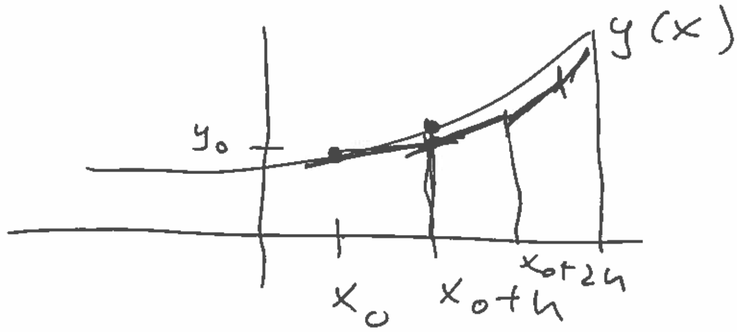
og $Y = (y_1, \dots, y_m)^T$. Da kan vi skrive (3) som

$$\begin{cases} Y' = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

der $Y_0 = (y_{1,0}, \dots, y_{m,0})^T$.

Vi tilnærmer y' med en differens:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(y(x+h) - y(x)\right)$$



$y' = \underline{\underline{f}}$

Taylor-utvikling:

$$y(x_0+h) \approx y(x_0) + h\,y'(x_0)$$
$$= y(x_0) + h\,f(x_0, y(x_0))$$

En tilnærming er:

$$\underline{y(x_0+h) = y(x_0) + h\,f(x_0, y(x_0))}$$

Velg $0 < h \ll 1$ og definer:

<u>Eulers metode</u>
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

Da vil $\underline{y_n \approx y(x_n)}$

Vi skal finne et estimat for feilen
$$y(x_n) - y_n$$

For systemer: $Y' = F(x, Y)$

Vi får:
$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + h\,F(x_n, Y_n) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

Høyere ordens ligninger

Vi skriver $u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k}$

m'te ordens ligning:

$$\underline{u^{(m)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(m-1)})}$$

med initialbetingelser:

$$u(x_0) = \underset{\text{gitt}}{u_0}, \quad u'(x_0) = \underset{\text{gitt}}{u_0'}, \dots, u^{(m-1)}(x_0) = \underset{\text{gitt}}{u_0^{(m-1)}}$$

Eks: $u'' = xu + u'$ på formen ovenfor

$u'' e^{u''} = u' + u$ ikke på formen ovenfor

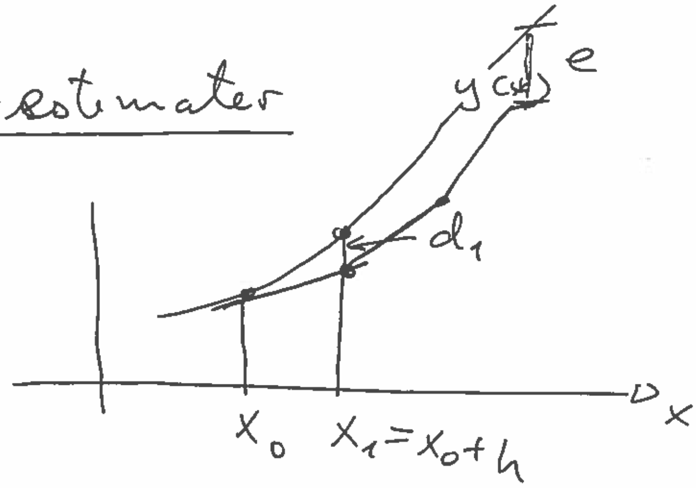
Vi kan alltid skrive om denne til et 1. ordens system av ODE.

$$\begin{aligned}
y_1 &= u \\
y_2 &= u' = y_1' \\
y_3 &= u'' = y_2' \\
&\vdots \\
y_m &= u^{(m-1)} = y_{m-1}'
\end{aligned}$$

Vi innfører $Y = (y_1, \dots, y_m)^T$ og finner

$$\underline{\underline{Y'}} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \\ f \end{pmatrix} = \underline{\underline{F(x, Y)}}$$

Feil-estimater



Vi skal betrakte ligningen

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

på intervallet $[x_0, x_{end}]$. Velg $h = \dfrac{x_{end} - x_0}{N}$

Da blir $x_N = x_0 + Nh = x_0 + x_{end} - x_0 = x_{end}$

<u>Lokal feil:</u> $d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$

↑ eksakt løsn ↑ numerisk løsn.

<u>Global feil:</u> $e_n = y(x_n) - y_n$

Vi finner for lokal feil:

$$d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_{n+1}) - (y_n + hf(x_n, y(x_n))$$
$$= y(x_{n+1}) - y_n - h\,y'(x_n) = \frac{1}{2}h^2 y''(\xi)$$
der $\xi \in (x_n, x_{n+1})$

Vi kan skrive:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + h\,f(x_n, y(x_n)) + d_{n+1}$$
$$y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n)$$

som gir:

$$e_{n+1} = y(x_n + h) - y_{n+1} = e_n + h\,(f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)) + d_{n+1}$$
$$= e_n + h\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \eta)(y(x_n) - y_n) + d_{n+1}$$

$$= e_n + h\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \eta)\, e_n + d_{n+1}$$

Anta at
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq L \quad \text{for alle } (x,y)$$

Da får vi
$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h\,L\,|e_n| + |d_{n+1}|$$

der $d_{n+1} = \frac{1}{2} h^2 y''(\xi)$

Anta at
$$|y''(x)| \leq 2D$$

for en D. Da får vi:
$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + hL|e_n| + h^2 D$$
$$= (1+hL)\,|e_n| + h^2 D$$

Vi finner
$$|e_1| \leq h^2 D$$
$$|e_2| \leq (1+hL)\,|e_1| + h^2 D \leq (1+hL)\,h^2 D + h^2 D$$
$$= ((1+hL) + 1)\,h^2 D$$
$$|e_3| \leq (1+hL)\,|e_2| + h^2 D$$
$$\leq (1+hL)((1+hL)+1)\,h^2 D + h^2 D$$
$$= ((1+hL)^2 + (1+hL) + 1)\,h^2 D$$

Ved induksjon:
$$|e_N| \leq \sum_{n=0}^{N-1} (1+hL)^n\, D h^2$$

$$|e_{n+1}| \le \left[\sum_{n=0}^{N-1} (1+hL)^n\right] h^2 D$$

$$= \left[\frac{(1+hL)^N - 1}{(1+hL) - 1}\cdot 1\right] h^2 D$$

$$= \frac{h}{L} D \left[(1+hL)^N - 1 \right]$$

Vi har

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

som gir $1 + x < e^x$ for $x > 0$

Videre:

$$(1+hL)^N \le \left(e^{hL}\right)^N = e^{hNL}$$

$$= e^{(x_{end} - x_0)L}$$

Det gir:

$$|e_{n+1}| \le \frac{hD}{L}\left(e^{(x_{end}-x_0)L} - 1\right)$$

$$= Ch$$

Det viser at $|e_{n+1}| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

<u>1. ordens metode</u>

Eulers metode
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

Eksplisitt

Vi skal se på implisitte metoder, f.eks Heuns metode.