21.10.19

Løsning av ligninger

$$\{ ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Polynomligninger

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

ligningen har <u>nøyaktig</u> n løsninger med komplekse tall.

Ligninger opp til og med grad 4 har løsninger gitt ved formel.

Høyere gradsligninger har ikke løsninger gitt ved formel (Abel)

For å regne ut løsningene numerisk, bruker man <u>aldri</u> formel.

Lineære ligninger

Generelt kan vi skrive dem på formen

$$Ax = b$$

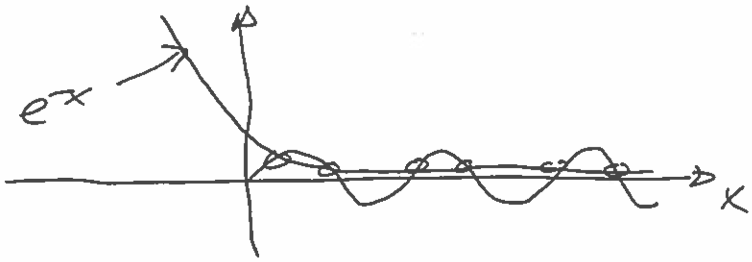
der A er en $n \times n$ matrise, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ er de ukjente og b er en $n \times 1$ matrise.

Cramers regel gir generell formel for løsningen. Brukes ikke <u>numerisk</u>

Ligningen har enten en entydig løsning eller ingen løsning eller ∞ mange løsn.

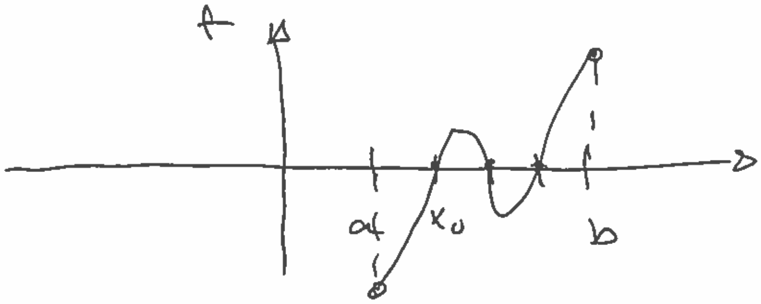
Hva med

$$\sin x = e^{-x}$$



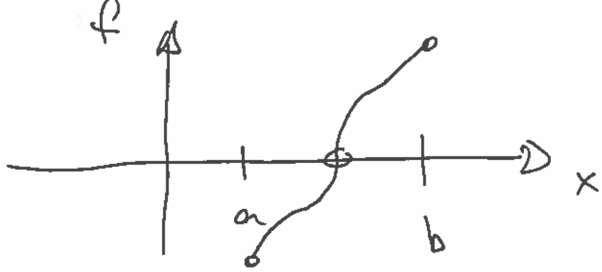
Hvordan finne løsningene?

<u>Skalare ligninger</u> (1 lign m 1 ukjent)

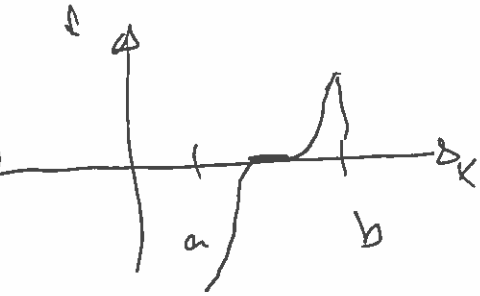


Vi antar at $f \in C([a,b])$ (dvs kontinuerlig på $[a,b]$). Anta videre at $f(a)\,f(b) < 0$. Da fins minst ett punkt x_0 slik at $f(x_0) = 0$. (Rolles teorem)

Hvis $f'(x) > 0$ eller $f'(x) < 0$ på $[a,b]$, så er løsningen entydig.

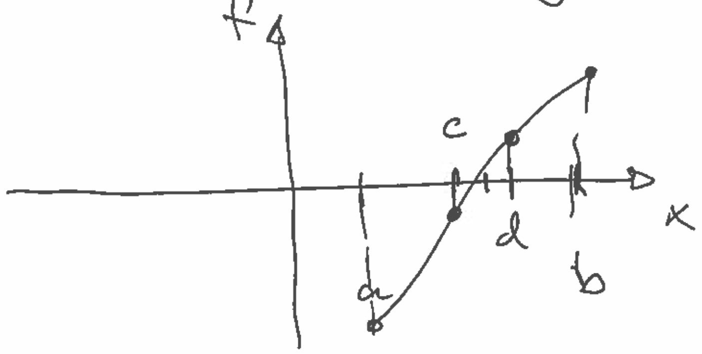


Her har vi antatt at $f \in C^1([a,b])$ (dvs 1 gang kont. deriverbar)



Bisection method (Halveringsmetoden)

Anta $f \in C([a,b])$ og $f(a)f(b) < 0$



$c = \frac{1}{2}(a+b)$

$d = \frac{1}{2}(c+b)$

La $a_0 = a$, $b_0 = b$

Definer $c_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, c_k] & \text{hvis } f(a_k)f(c_k) < 0 \\ [c_k, b_k] & \text{hvis } f(b_k)f(c_k) < 0 \end{cases}$$

Om vi kaller løsningen r, dvs $f(r) = 0$, så er $\underline{|c_k - r| \leq (b_k - a_k)/2}$.

Fikspunkt iterasjoner

Ønsker å løse $f(x) = 0$

Vi skriver om problemet slik at

$$f(x) = 0 \iff g(x) = x$$

F. eks.

$$g(x) = x - f(x)$$

Ikke entydig!

Eks $\quad f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

$f(x) = 0$

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}\left(x^3 + x^2 - 3\right) = g_1(x)$$

$$x^3 = 3 + 3x - x^2$$

$$x = \left(3 + 3x - x^2\right)^{1/3} = g_2(x)$$

Det betyr noe hvilken g man velger osv!

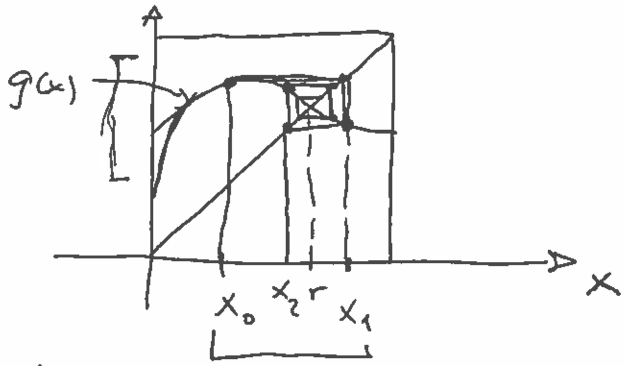
Iterasjon Gitt $f(x)$, og ønsker å finne en r slik at $f(r) = 0$.

Skriver om slik at $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$

Velger x_0 vilkårlig (helst nær r), og definerer $x_{k+1} = g(x_k)$, dvs

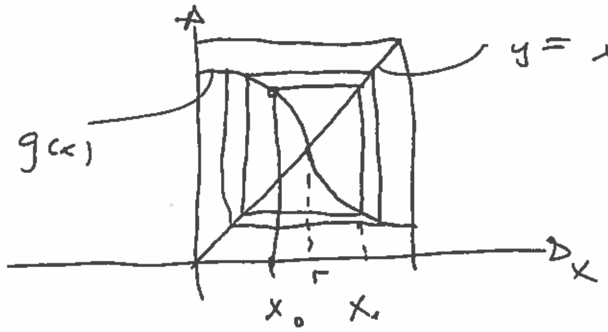
$x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = g(x_2)$, osv,

og ønsker at $x_k \to r$ når $k \to \infty$.



Konvergerer!

Eks

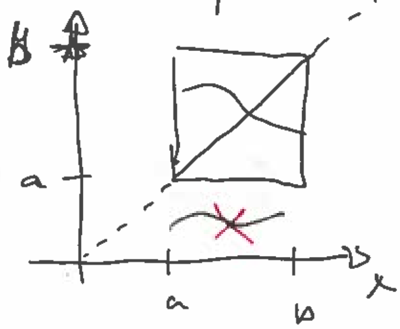


Konvergerer ikke!

Anta $g \in C([a,b])$ og $a < g(x) < b$.

Da har g minst ett fikspunkt r, dvs $g(r) = r$

Dersom $g \in C^1([a,b])$ i tillegg og $\boxed{|g'(x)| < 1}$, så er fikspunktet entydig.



Bevis: Definer

$\underline{f(x) = x - g(x)}$

Da er $f \in C([a,b])$

og $f(a) = a - g(a) < 0$ og $f(b) = b - g(b) > 0$, dvs $f(a)\,f(b) < 0$. Da fins r slik at $f(r) = 0$, dvs $g(r) = r$.

Om $g \in C^1([a,b])$, er også $f \in C^1([a,b])$, og $f'(x) = 1 - g'(x) > 0$. Da fins det nøyaktig ett punkt r slik at $f(r) = 0$, dvs $g(r) = r$.

Anta $g([a,b]) \subset (a,b)$ der $g \in C^1([a,b])$

$(a < g(x) < b)$

Vi vet at $g(r) = r$ er entydig

Definerer $x_{n+1} = g(x_n)$

Feilen vi gjør er $e_n = r - x_n$

$$|e_{n+1}| = |r - x_{n+1}| = |g(r) - g(x_n)|$$

$$= |g'(\xi_n)(r - x_n)| = |g'(\xi_n)||e_n|$$

middelverdi-setningen der ξ_n er et tall mellom x_n og r.

Anta nå at $|g'(x)| \leq L < 1$ for alle $x \in (a,b)$. Da blir $|e_{n+1}| \leq L|e_n|$

Vi får at $|e_n| \leq L|e_{n-1}| \leq L^2|e_{n-2}| \leq \dots \leq L^k|e_0|$

Altså

$$\underline{|e_n| \leq L^k |e_0|} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$r - x_0$

$|e_0| \leq (b-a)$

Jo mindre L er, jo fortere konvergerer metoden.

Dersom $|g'(r)| > 1$ konvergerer metoden aldri.

Dersom $|g'(r)| < 1$, så fins det $\delta > 0$ slik at $|g'(x)| < 1$ på intervallet $I_\delta = (r - \delta, r + \delta)$.

Newtons metode

Vi ønsker minst mulig L.

Vi har:

$$e_{k+1} = r - x_{k+1} = g(r) - g(x_k)$$

$$= g(r) - g(r - e_k)$$

$$= -g'(r)e_k + \frac{1}{2}g''(\xi_k)e_k^2$$

Taylor-utvikling

et pkt mellom x_k og r.

Hvis $g'(r) = 0$, så ville

$$|e_{k+1}| = \frac{1}{2}|g''(\xi_k)|e_k^2$$

må kunne begrenses uavh. av ξ_k.

Kvadratisk konvergens!

Velg $g(x) = x - h(x)f(x)$

Om $f(x) = 0$, så er $g(x) = x$ (uavh. av h)

$$g'(x) = 1 - h'(x)f(x) - h(x)f'(x)$$

$0 = g'(r) = 1 - h(r)f'(r)$. Velg $h(r) = 1/f'(r)$

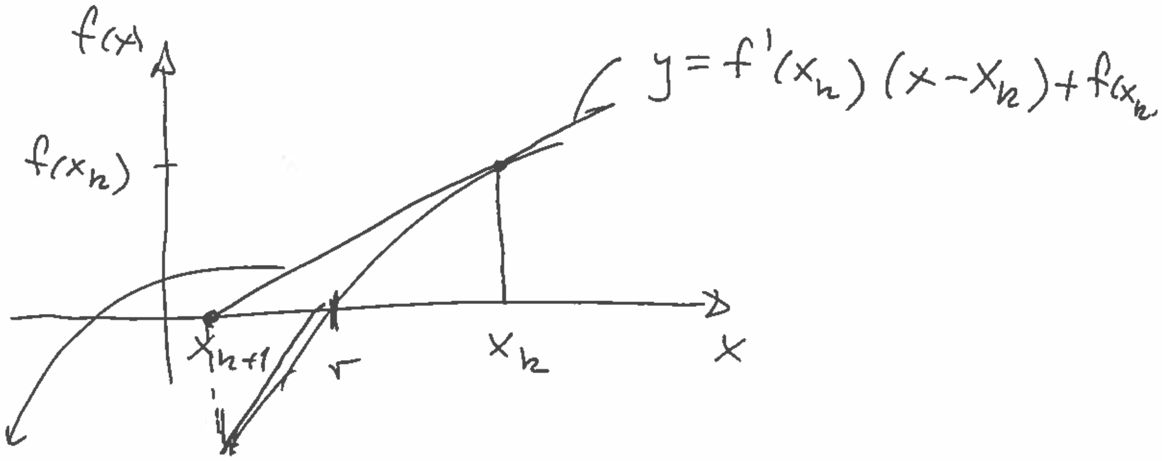
og generelt $h(x) = 1/f'(x)$

Dvs

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

og

$$x_{k+1} = g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



tangenten har ligning

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$$

Skjærer x-aksen i pkt x_{k+1}, dvs

$$f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = 0$$

som gir

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Vi har

$$0 = f(r) \overset{\text{Taylor}}{=} f(x_k) + f'(x_k)(r - x_k) + \tfrac{1}{2} f''(\xi_k)(r - x_k)^2$$

$$0 \underset{\text{Newton}}{=} f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Subtraherer:

$$0 = f'(x_k)(r - x_{k+1}) + \tfrac{1}{2} f''(\xi_k)(r - x_k)^2$$

dvs

$$e_{k+1} = r - x_{k+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(\xi_k)} e_k^2$$

Teorem (Konvergens av Newton-iterasjon)

Anta vi har funksjon f slik at $f(r) = 0$

La $I_\delta = (r-\delta, r+\delta)$ for en $\delta > 0$

Anta videre at $f \in C^2(I_\delta)$ og at det fins konstant $M > 0$ slik at

$$\left|\frac{f''(x)}{f'(y)}\right| \leq 2M \quad \text{for alle } x, y \in I_\delta$$

Da konvergerer Newton-iterasjon kvadratisk, dvs $|e_{k+1}| \leq M |e_k|^2$ for alle start-verdier x_0 slik at

$$|x_0 - r| \leq \min(1/M, \delta).$$