Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4122,TMA4123,TMA4125,TMA4130 Matematikk 4N/M

Faglig kontakt under eksamen: Gunnar Taraldsen

Tlf: 46432506

Eksamensdato: 19. august 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C:
Bestemt, enkel kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Annen informasjon:

- Alle svar må begrunnes. Du må ha med nok mellomregninger til at tenkemåten din klart fremgår.
- Alle deloppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

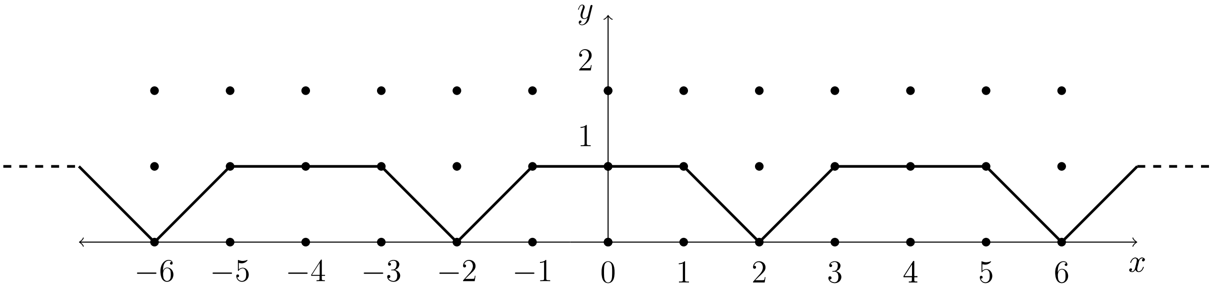
Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave			
Originalen er:			
1-sidig	☐	**2-sidig**	☒
sort/hvit	☒	**farger**	☐
skal ha flervalgskjema	☐		

Dato Sign

Oppgave 1 Grafen til $y = f(x)$ er gitt under.

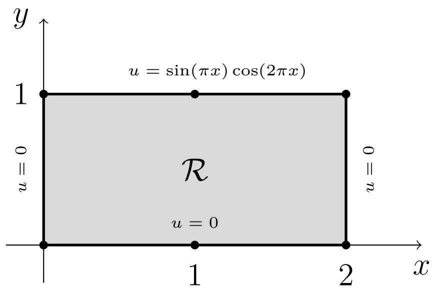


a) Finn perioden til f og definer hva dette betyr. Er f en like eller en odde funksjon?

b) Finn Fourier-rekken for $f(x)$.

Oppgave 2 La $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ og } 0 \leq y \leq 1\}$. Betrakt Laplaceligningen på $\mathcal{R}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$



a) Først finner vi en numerisk løsning. Sett opp et lineært system for å finne en approksimasjon til løsningen u i punktene $u_{ij} = u(i \cdot h, j \cdot k)$, med $h = k = \frac{1}{2}$. Bruk randbetingelsene fra diagrammet ovenfor. (Det er ikke nødvendig å løse systemet.)

b) Finn så alle løsninger på formen $u = F(x)G(y)$ som oppfyller de tre randbetingelsene $u(x, 0) = u(0, y) = u(2, y) = 0$.

c) Finn en løsning som også oppfyller randbetingelsen $u(x, 1) = \sin(\pi x)\cos(2\pi x)$.

Oppgave 3 **(Bare 4N!)** Bruk Laplacetransformasjon for å løse ligningen

$$y + \int_0^t \tau y'(t-\tau)\, d\tau = t$$

med initialverdien $y(0) = 0$.

Oppgave 4 Bruk Fouriertransformasjon for å løse varmeligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad \text{og} \qquad u(x,0) = e^{-x^2}\,,$$

for en funksjon $u(x,t)$ med $t \geq 0$ og $x \in \mathbb{R}$.

Oppgave 5 La $y(x)$ være løsningen til differensialligningen

$$y' = \frac{-x}{y^2} \qquad \text{og} \qquad y(0) = 1\,.$$

Bruk forbedret Eulers metode (improved Euler) med $h = 0.1$ for å finne tilnærmede verdier til $y(x)$ i punktene

$$x_1 = 0.1 \qquad \text{og} \qquad x_2 = 0.2\,.$$

(Bruk 4 desimaler i utregningen.)

Oppgave 6 Vi ønsker en numerisk beregning av integralet

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \qquad \text{hvor} \qquad f(x) = \ln(x^2+1)\,,$$

med trapesmetoden. Hvor liten må steglengden h være for at trapesmetoden skal gi en feil mindre enn 0.01? Beregn integralet med trapesmetoden med denne verdien av h.

Oppgave 7 Polynomet $p(x) = x^3 - 3x + 1$ har en rot i intervallet $[1,2]$.

a) Skriv ned en fikspunktiterasjon for å finne denne roten, og forklar hvorfor metoden din konvergerer mot løsningen.

b) Bruk Newtons metode for å finne verdien av roten til 3 desimaler.

Oppgave 8 **(Bare 4M!)** Finn polynomet av laveste grad som interpolerer dataene

i	0	1	2	3
x_i	-2	0	1	2
$f(x_i)$	-1	1	-1	3

Fourier

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$
$f * g(x)$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
$f'(x)$	$i\omega\hat{f}(\omega)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\lvert\omega\rvert}$
$f(x) = 1$ for $\lvert x\rvert < a$, 0 otherwise	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega}$

Laplace transform

$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-sa}F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Numerics

- Newton's method: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$.

- Newton's method for systems: $\mathbf{J}^{(k)}\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ with $(\mathbf{J}^{(k)})_{ij} = \partial_j f_i^{(k)}$
- Lagrange interpolation polynomial: $L_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$
- Trapezoid rule: $\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b)\right]$

  Error of the trapezoid rule: $|\epsilon| \le h^2 \frac{b-a}{12} \max_{a\le x\le b} |f''(x)|$.
- Simpson rule: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$ with $f_i = f(x_i)$.

  Error of the Simpson rule: $|\epsilon| \le h^4 \frac{b-a}{180} \max_{a\le x\le b} |f^{(4)}(x)|$.
- Gauss–Seidel iteration: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}$ with $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$.
- Jacobi iteration: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)}$
- Euler method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$
- Improved Euler method: $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$, $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1)$,

  $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2$.
- Classical Runge–Kutte method:

  $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$, $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1/2)$,

  $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_2/2)$, $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3)$,

  $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_3 + \frac{1}{6}\mathbf{k}_4$.
- Backward Euler method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$
- Finite differences: $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{2h}$

  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}$

  $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \approx \frac{u(x,y+h)-u(x,y-h)}{2h}$

  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \approx \frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}$