


TMA4130

Numerisk løsninger av PDL.

Eduard Ortega

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 46

- 
- Fram til nå har vi sett på ordinære differensialligninger hvor løsningen kun avhenger av en fri variabel.
 - Vi skal nå se på partielle differensialligninger hvor løsningen avhenger av to (generelt flere) variable.
 - Generelt format for andre ordens kvasilineær PDL i to variable:

$$a \cdot u_{xx} + 2b \cdot u_{xy} + c \cdot u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y).$$

Disse kan igjen kategoriseres i tre klasser.



— $ac - b^2 > 0$: Det kalles en elliptisk ligning:

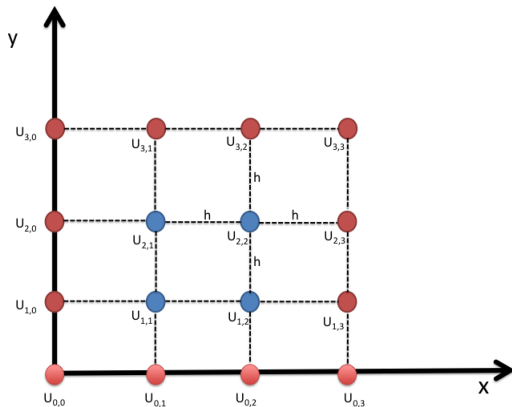
$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{Laplace Ligning}$$

— $ac - b^2 = 0$: Det kalles en parabolisk ligning:

$$u_{xx} = u_y \quad \text{Varmeligning}$$

— $ac - b^2 < 0$: Det kalles en hyperbolsk ligning:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad \text{Varmeligning}$$



Vi ser nå på randverdi problem

differansemetoder.



- Problemet nå er gitt verdiene rundt, finn verdiene inni området.
- Dirichlet randbetingelser: Gitt funksjon på randen.
- Vi innfører et grid og erstatter de deriverte i ligningen med numeriske tilnærminger. Når dette er gjort får vi et algebraisk ligningssystem som vi løser. Løsningen av dette systemet vil være vår tilnærming til løsningen i gridpunktene.
- Vanskelig å løse problem i irregulære geometrier.

Hvordan tilnærme den deriverte numerisk

Vi kalles $x_{i+1} = x_i + h$ og $x_{i-1} = x_i - h$, da vi kan tilnærme

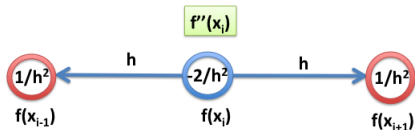
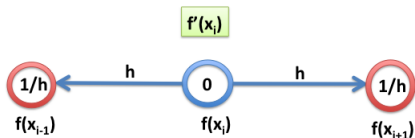
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h},$$

og

$$\begin{aligned} f''(x_i) &= \frac{f'(x_i + h/2) - f'(x_i - h/2)}{h} \\ &\approx \frac{\frac{f(x_i + h/2 + h/2) - f(x_i + h/2 - h/2)}{h} - \frac{f(x_i - h/2 + h/2) - f(x_i - h/2 - h/2)}{h}}{h} \\ &= \frac{\frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}}{h} = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)}{h^2} \end{aligned}$$

Hvordan tilnærme den deriverte numerisk

Slike differensialformler (derav navnet på metodene) representeres ofte som stensiler. De har stensil



Fempunktsformelen



Vi betrakter nå operatoren

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Som før innfører vi et grid med navngivning en lokal navngivning.

Dette betyr at vi indekserer med to indekser, altså at

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j).$$

For å lette notasjonen noe bruker vi samme steglengde h i både x og y retning.

Fempunktsformelen

1. Vi tilnærmer de partiellderiverte ved differanser som før. Vi har altså

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h^2}$$

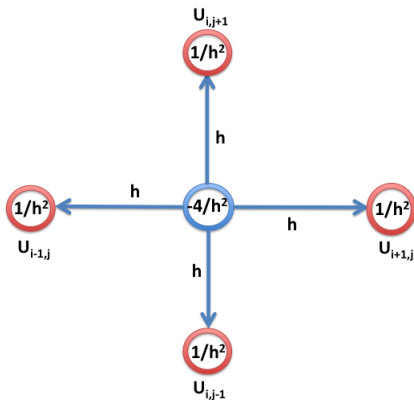
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{h^2}$$

2. Vi summerer disse og får den mye brukte fempunktsformelen

$$\nabla^2 u(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

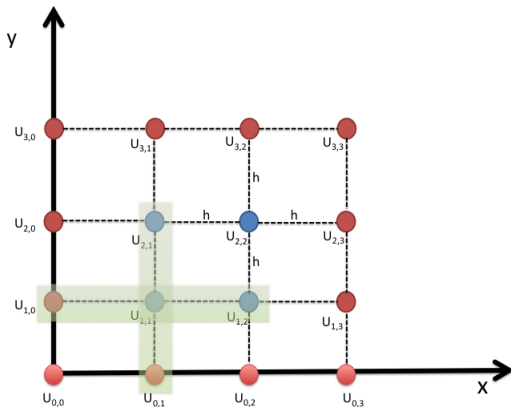
Navnet har den fått fra det faktum at den bruker fem punkt til å tilnærme løsningen.

Fempunktsformelen

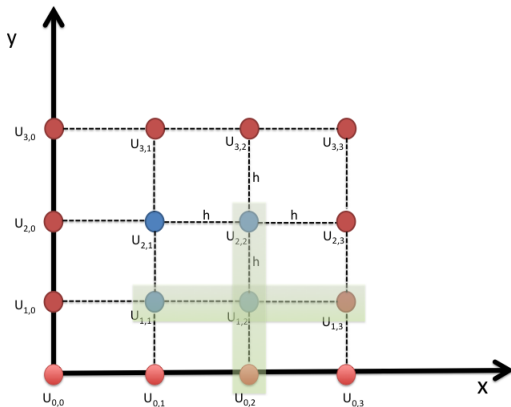


Dette er stensilen for fempunktsformelen.

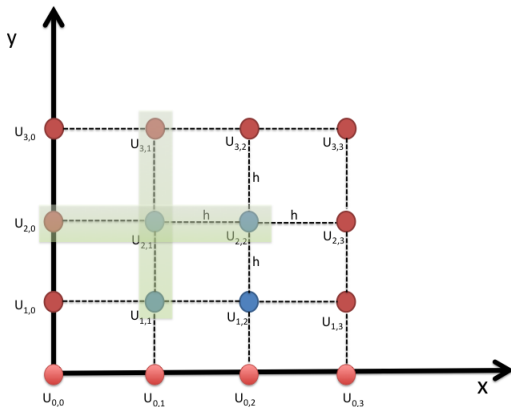
Vi skal skrive en lineær system:



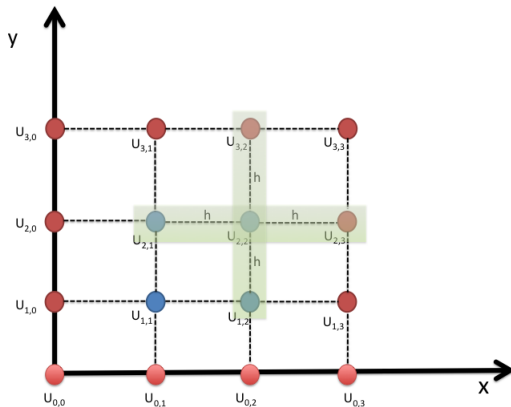
Vi skal skrive en lineær system:



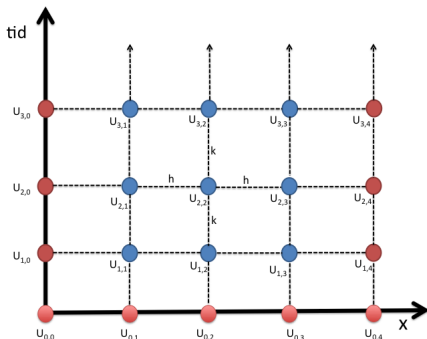
Vi skal skrive en lineær system:



Vi skal skrive en lineær system:



Løsning av paraboliske ligninger.



Initialverdiproblem - gitt en løsning ved $t = 0$ finn løsningen framover i tid.

Vi bruker symbolet h for å indikere romlig steglengde, og k for å indikere temporær steglengde.

Varmeligning

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u(a, t) = g_0(t)$$

$$u(b, t) = g_1(t)$$

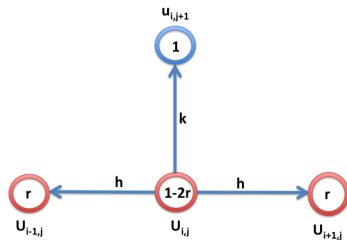
Da

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k}$$

og

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{h^2}$$

Svarer til stensilen

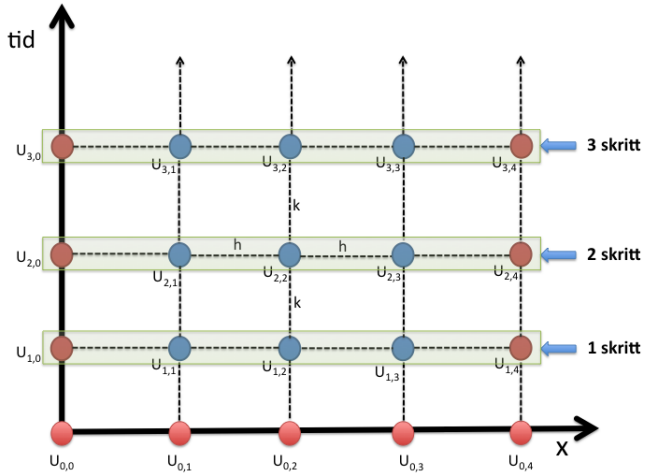


der $r = \frac{k}{h^2}$.

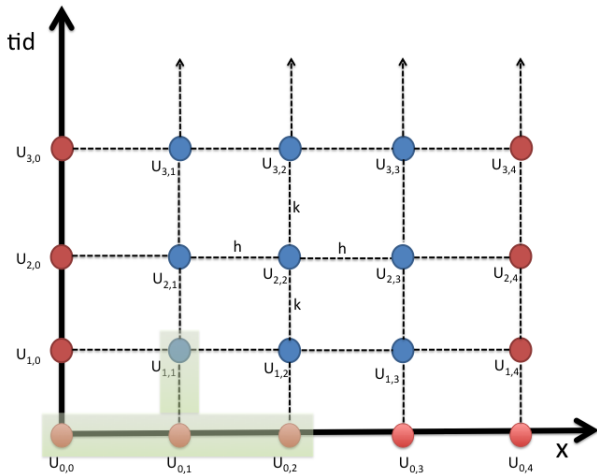
Vi får stabilitetskravet når

$$r \leq \frac{1}{2}$$

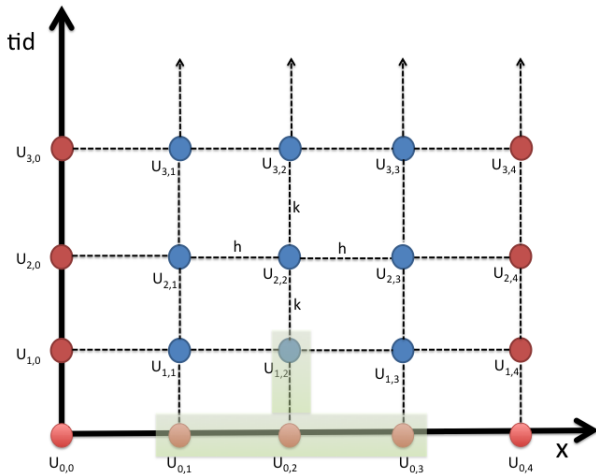
Skriver lineær system



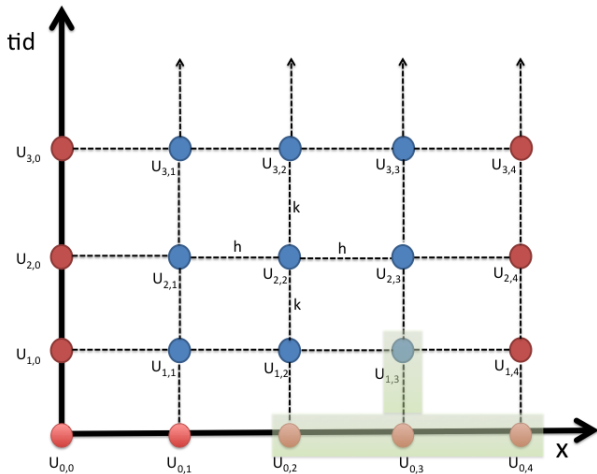
Skritt 1



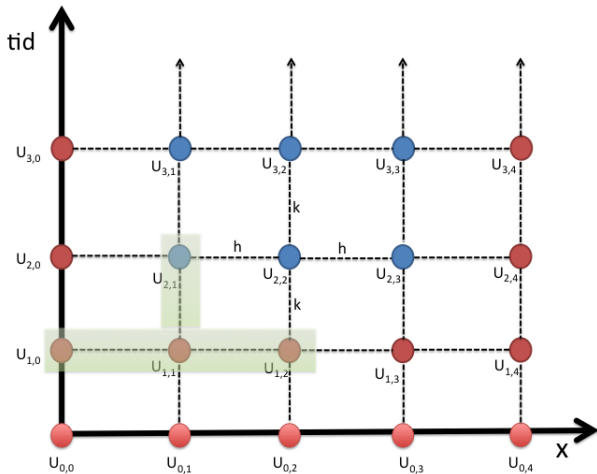
Skritt 1



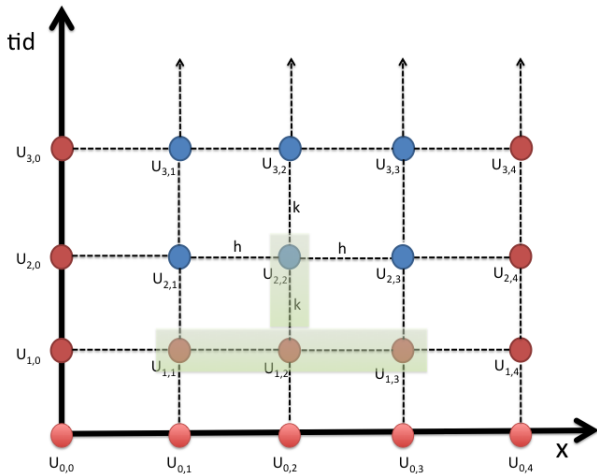
Skritt 1



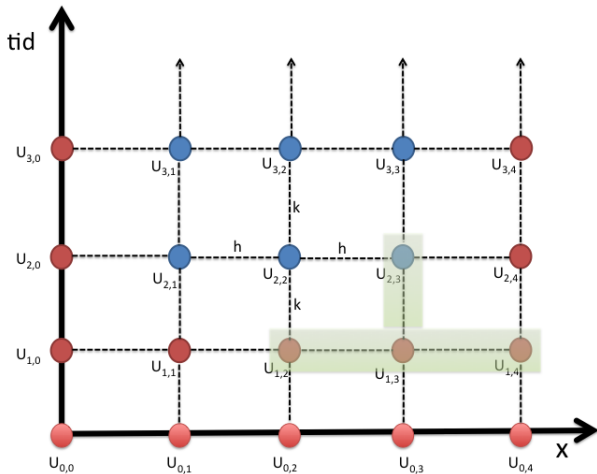
Skritt 2



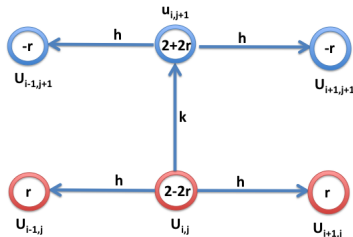
Skritt 2



Skritt 2



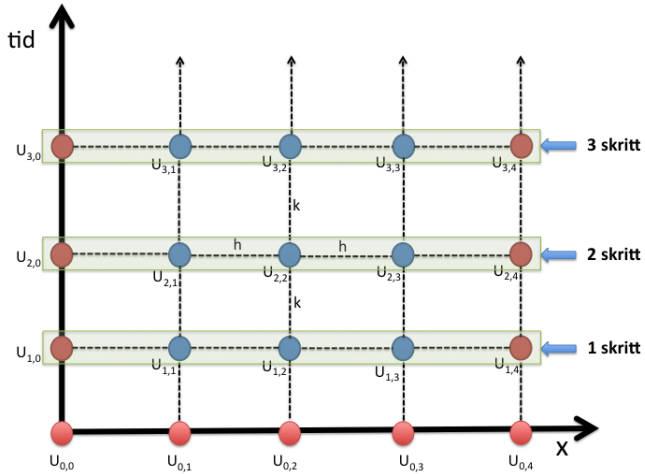
Varmeligning - Crank-Nicolsons metode



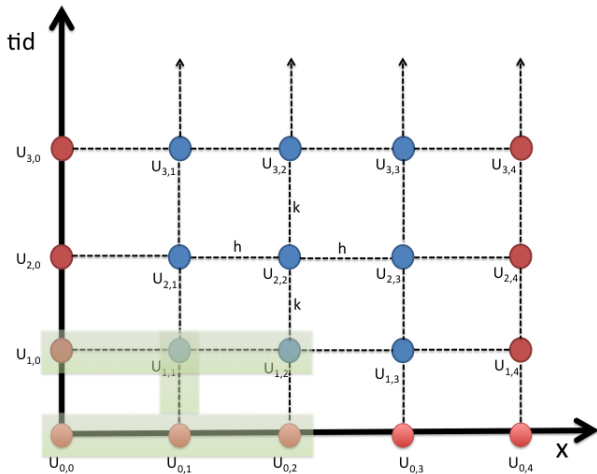
der $r = \frac{k}{h^2}$.

Vi får ingen stabilitetskravet om r .

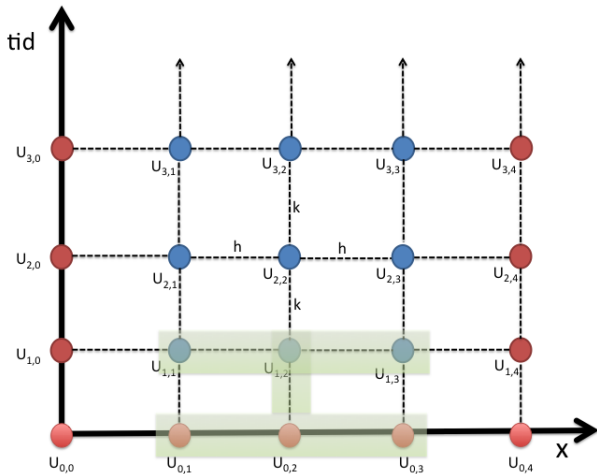
Skriver lineær system



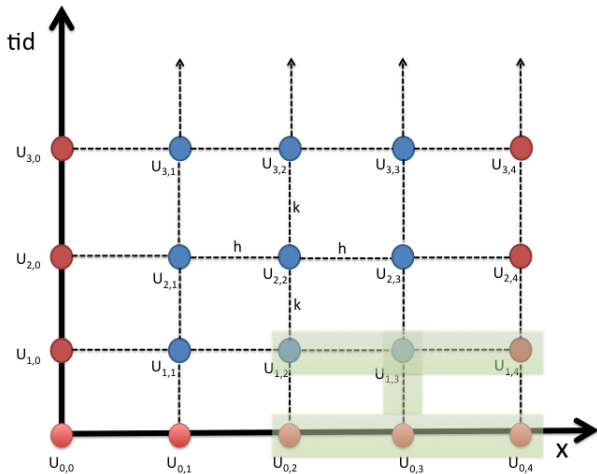
Skritt 1



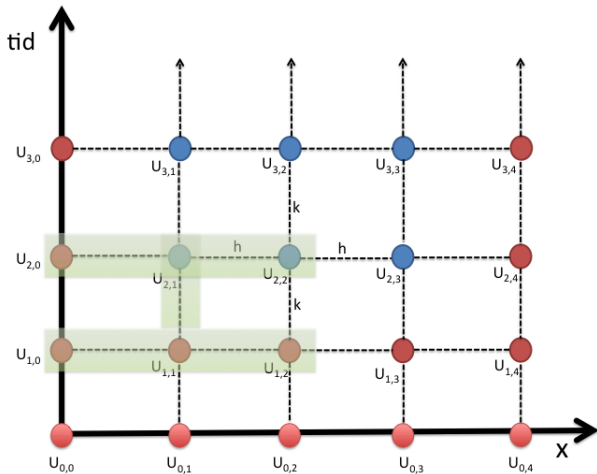
Skritt 1



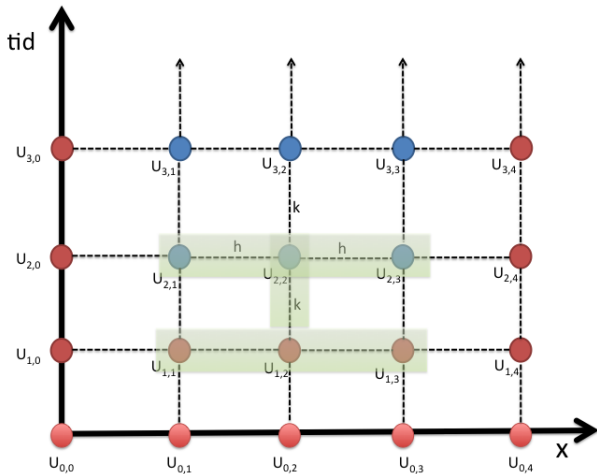
Skritt 1



Skritt 2



Skritt 2



Skritt 2

