NTNU

Kunnskap for en bedre verden

# TMA4130

## Numerisk løsninger av PDL.

Eduard Ortega

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 46

- Fram til nå har vi sett på ordinære differensialligninger hvor løsningen kun avhenger av en fri variabel.
- Vi skal nå se på partielle differensialligner-ligninger hvor løsningen avhenger av to (generelt flere) variable.
- Generelt format for andre ordens kvasilineær PDL i to variable:

$$a \cdot u_{xx} + 2b \cdot u_{xy} + c \cdot u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)\,.$$

Disse kan igjen kategoriseres i tre klasser.

— $ac - b^2 > 0$: Det kalles en elliptisk ligning:

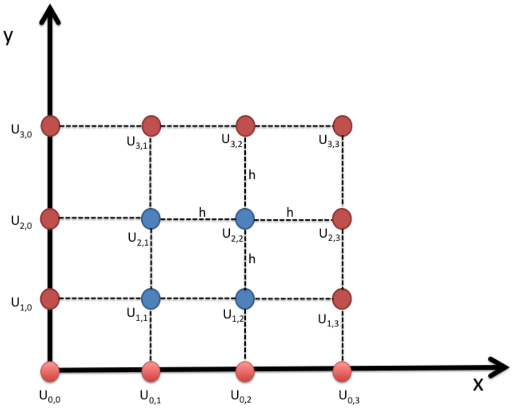
$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{Laplace Ligning}$$

— $ac - b^2 = 0$: Det kalles en parabolsk ligning:

$$u_{xx} = u_y \qquad \text{Varmeligning}$$

— $ac - b^2 = 0$: Det kalles en hyperbolsk ligning:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \qquad \text{Varmeligning}$$




Vi ser nå på randverdiproblem

**differansemetoder.**

- Problemet nå er gitt verdiene rundt, finn verdiene inni området.
- Dirichlet randbetingelser: Gitt funksjon på randen.
- Vi innfører et grid og erstatter de deriverte i ligningen med numeriske tilnærminger. Når dette er gjort får vi et algebraisk ligningssystem som vi løser. Løsningen av dette systemet vil være vår tilnærming til løsningen i gridpunktene.
- Vanskelig å løse problem i irregulære geometrier.

# Hvordan tilnærme den deriverte numerisk

Vi kalles $x_{i+1} = x_i + h$ og $x_{i-1} = x_i - h$, da vi kan tilnærme

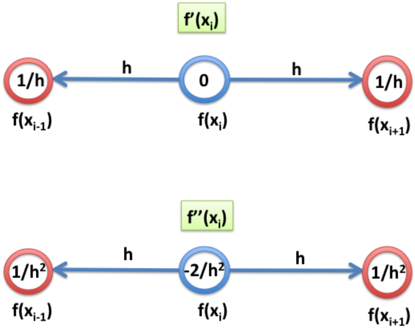
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h},$$

og

$$\begin{aligned}
f''(x_i) &= \frac{f'(x_i + h/2) - f'(x_i - h/2)}{h} \\
&\approx \frac{\frac{f(x_i+h/2+h/2)-f(x_i+h/2-h/2)}{h} - \frac{f(x_i-h/2+h/2)-f(x_i-h/2-h/2)}{h}}{h} \\
&= \frac{\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i)-f(x_i-h)}{h}}{h} = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)}{h^2}
\end{aligned}$$

# Hvordan tilnærme den deriverte numerisk

Slike differensialformler (derav navnet på metodene) representeres ofte som stensiler. De har stensil



## Fempunktsformelen

Vi betrakter nå operatoren

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Som før innfører vi et grid med navngivning en lokal navngivning.

Dette betyr at vi indekserer med to indekser, altså at

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j) \, .$$

For å lette notasjonen noe bruker vi samme steglengde $h$ i både $x$ og $y$ retning.

## Fempunktsformelen

1. Vi tilnærmer de partiellderiverte ved differanser som før. Vi har altså

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h^2}$$

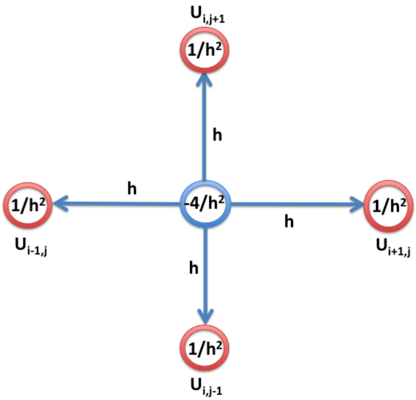
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{h^2}$$

2. Vi summerer disse og får den mye brukte fempunktsformelen

$$\nabla^2 u(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

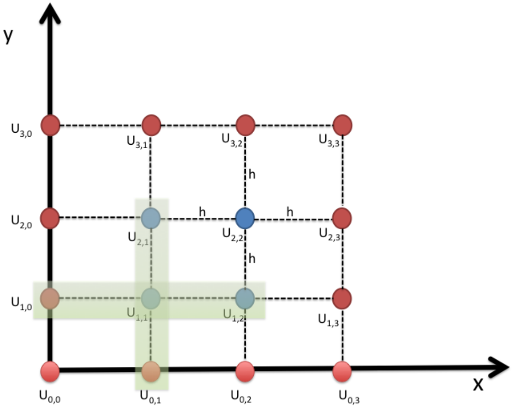
   Navnet har den fått fra det faktum at den bruker fem punkt til å tilnærme løsningen.

# Fempunktsformelen

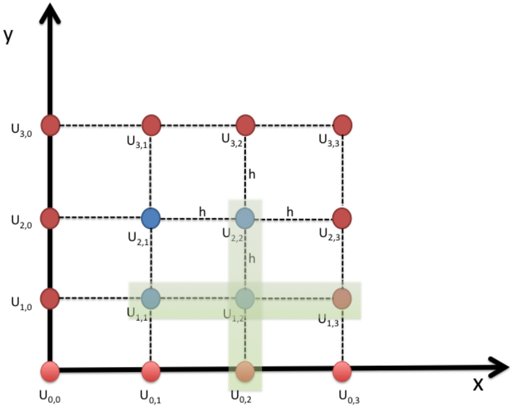



Dette er stensilen for fempunktsformelen.

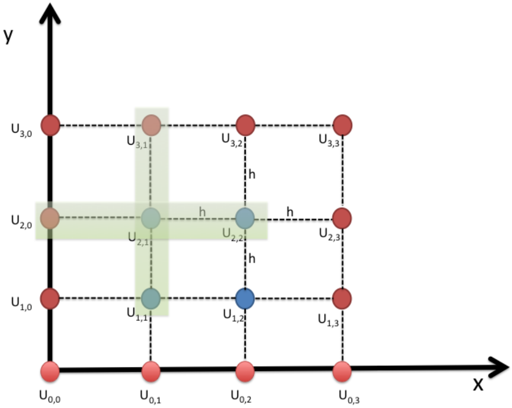
Vi skal skrive en lineær system:



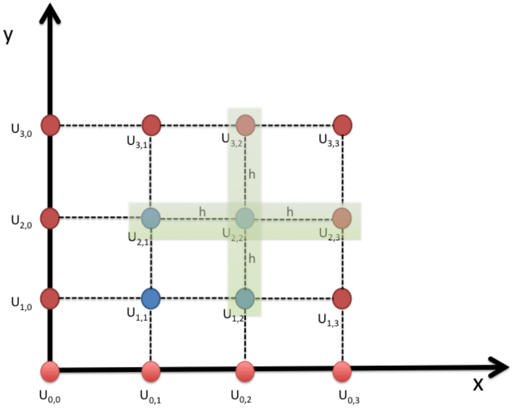
Vi skal skrive en lineær system:



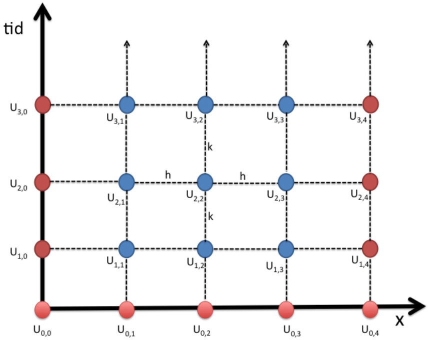
Vi skal skrive en lineær system:



Vi skal skrive en lineær system:



# Løsning av parabolske ligninger.




Initialverdiproblem - gitt en løsning ved $t = 0$ finn løsningen framover i tid.

Vi bruker symbolet $h$ for å indikere romlig steglengde, og $k$ for å indikere temporær steglengde.

# Varmeligning

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{u(x,0) = f(x)}\,, \qquad \boxed{u(a,t) = g_0(t)}\,, \qquad \boxed{u(b,t) = g_1(t)}\,.$$

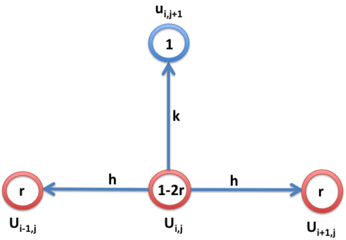
Da

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k}$$

og

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{h^2}$$

Svarer til stensilen

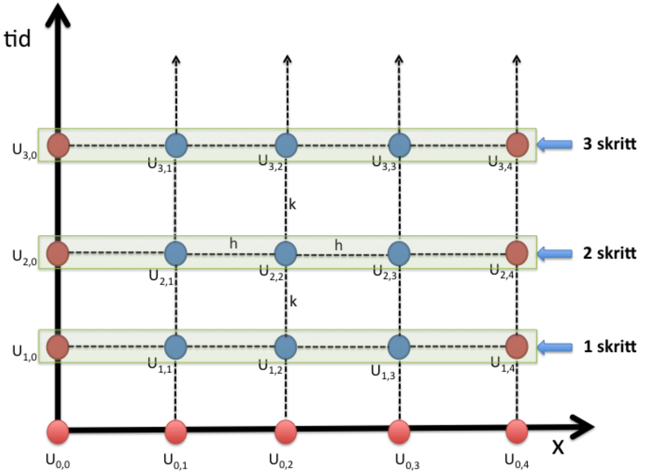



der $r = \frac{k}{h^2}$.

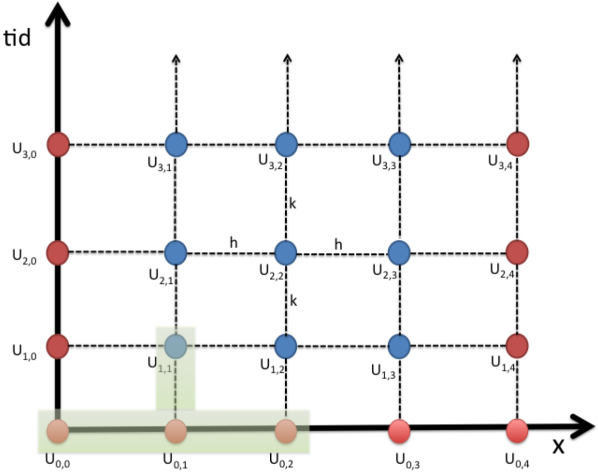
Vi får stabilitetskravet når

$$\boxed{r \leq \frac{1}{2}}.$$

# Skriver lineær system

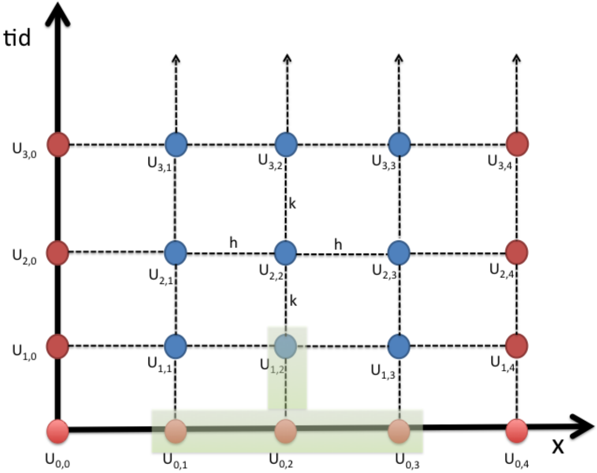


# Skritt 1



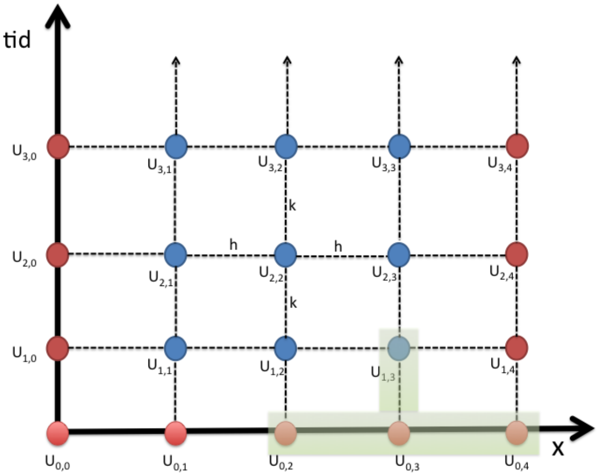
tid
$U_{3,0}$
$U_{3,1}$
$U_{3,2}$
$U_{3,3}$
$U_{3,4}$
k
h
h
$U_{2,0}$
$U_{2,1}$
$U_{2,2}$
$U_{2,3}$
$U_{2,4}$
k
$U_{1,0}$
$U_{1,1}$
$U_{1,2}$
$U_{1,3}$
$U_{1,4}$
$U_{0,0}$
$U_{0,1}$
$U_{0,2}$
$U_{0,3}$
$U_{0,4}$
x

# Skritt 1



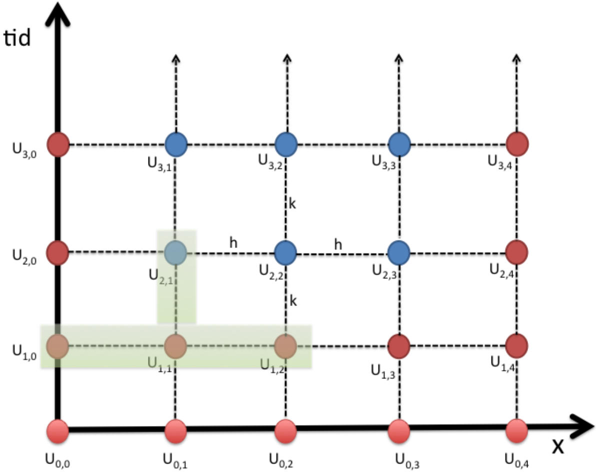
tid
$U_{3,0}$
$U_{3,1}$
$U_{3,2}$
$U_{3,3}$
$U_{3,4}$
k
h
h
$U_{2,0}$
$U_{2,1}$
$U_{2,2}$
$U_{2,3}$
$U_{2,4}$
k
$U_{1,0}$
$U_{1,1}$
$U_{1,2}$
$U_{1,3}$
$U_{1,4}$
$U_{0,0}$
$U_{0,1}$
$U_{0,2}$
$U_{0,3}$
$U_{0,4}$
x

# Skritt 1

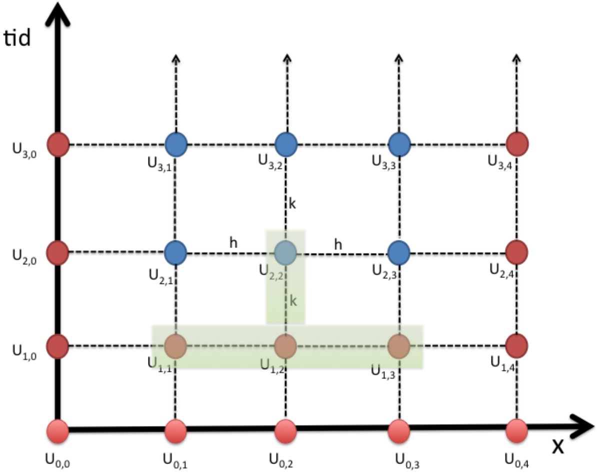


tid
U3,0
U3,1
U3,2
U3,3
U3,4
k
h
h
U2,0
U2,1
U2,2
U2,3
U2,4
k
U1,0
U1,1
U1,2
U1,3
U1,4
U0,0
U0,1
U0,2
U0,3
U0,4
x

# Skritt 2

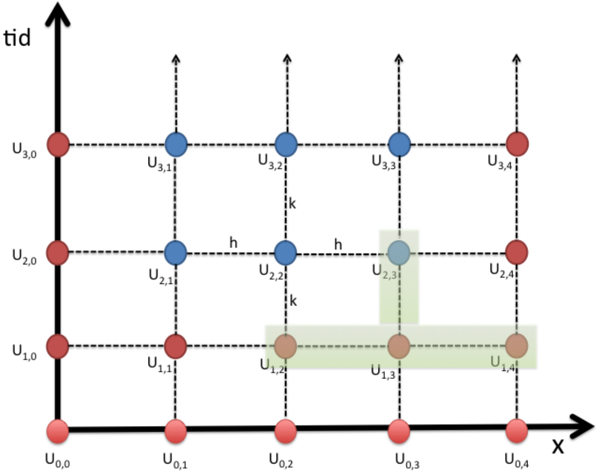

tid
U3,0
U3,1
U3,2
U3,3
U3,4
k
h
h
U2,0
U2,1
U2,2
U2,3
U2,4
k
U1,0
U1,1
U1,2
U1,3
U1,4
U0,0
U0,1
U0,2
U0,3
U0,4
x

# Skritt 2

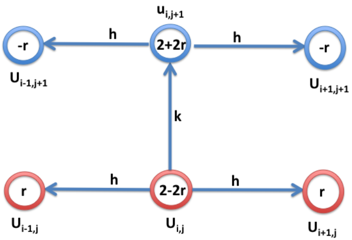


tid
U3,0
U3,1
U3,2
U3,3
U3,4
k
U2,0
h
h
U2,1
U2,2
U2,3
U2,4
k
U1,0
U1,1
U1,2
U1,3
U1,4
U0,0
U0,1
U0,2
U0,3
U0,4
x

# Skritt 2


tid
x
$U_{3,0}$
$U_{3,1}$
$U_{3,2}$
$U_{3,3}$
$U_{3,4}$
k
h
h
$U_{2,0}$
$U_{2,1}$
$U_{2,2}$
$U_{2,3}$
$U_{2,4}$
k
$U_{1,0}$
$U_{1,1}$
$U_{1,2}$
$U_{1,3}$
$U_{1,4}$
$U_{0,0}$
$U_{0,1}$
$U_{0,2}$
$U_{0,3}$
$U_{0,4}$

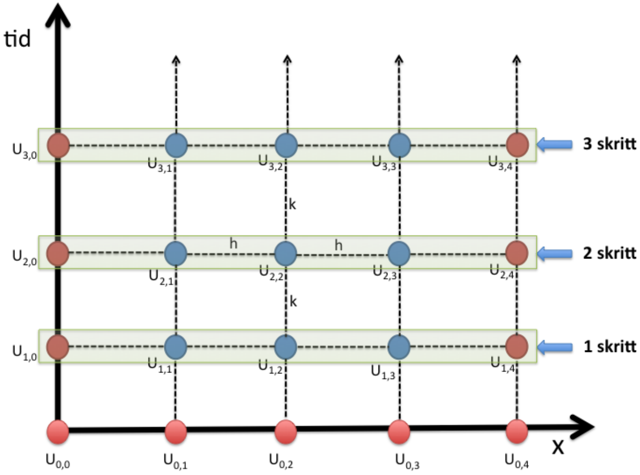
# Varmeligning - Crank-Nicolsons metode



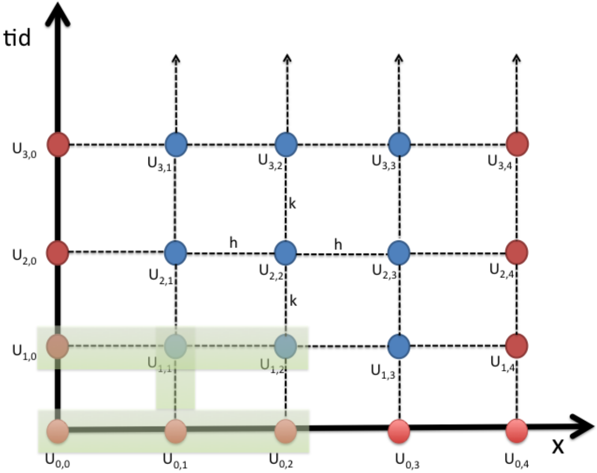

der $r = \frac{k}{h^2}$.

Vi får ingen stabilitetskravet om $r$.

# Skriver lineær system

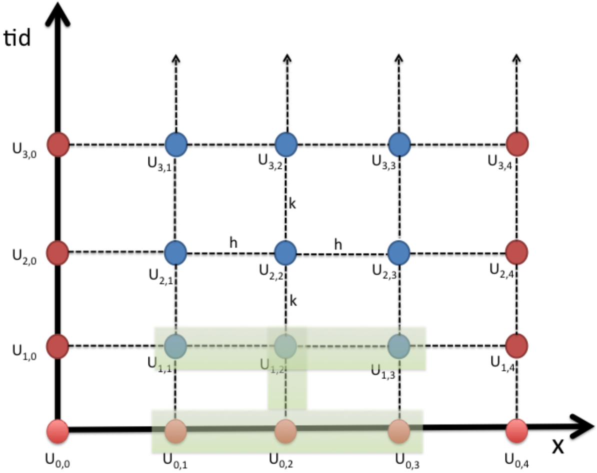


# Skritt 1



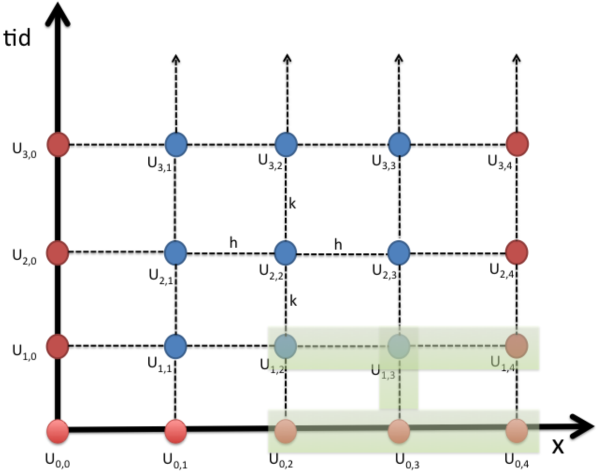
tid
$U_{3,0}$
$U_{3,1}$
$U_{3,2}$
$U_{3,3}$
$U_{3,4}$
k
h
h
$U_{2,0}$
$U_{2,1}$
$U_{2,2}$
$U_{2,3}$
$U_{2,4}$
k
$U_{1,0}$
$U_{1,1}$
$U_{1,2}$
$U_{1,3}$
$U_{1,4}$
$U_{0,0}$
$U_{0,1}$
$U_{0,2}$
$U_{0,3}$
$U_{0,4}$
x

# Skritt 1



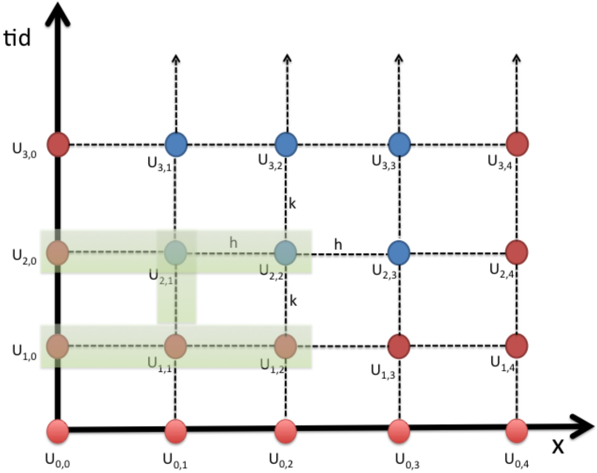
tid
U3,0
U3,1
U3,2
U3,3
U3,4
k
U2,0
h
h
U2,1
U2,2
U2,3
U2,4
k
U1,0
U1,1
U1,2
U1,3
U1,4
U0,0
U0,1
U0,2
U0,3
U0,4
X

## Skritt 1



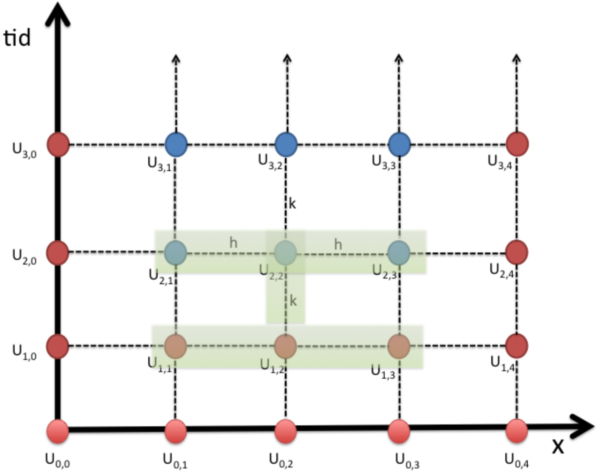
tid
$U_{3,0}$
$U_{3,1}$
$U_{3,2}$
$U_{3,3}$
$U_{3,4}$
k
h
h
$U_{2,0}$
$U_{2,1}$
$U_{2,2}$
$U_{2,3}$
$U_{2,4}$
k
$U_{1,0}$
$U_{1,1}$
$U_{1,2}$
$U_{1,3}$
$U_{1,4}$
$U_{0,0}$
$U_{0,1}$
$U_{0,2}$
$U_{0,3}$
$U_{0,4}$
x

# Skritt 2

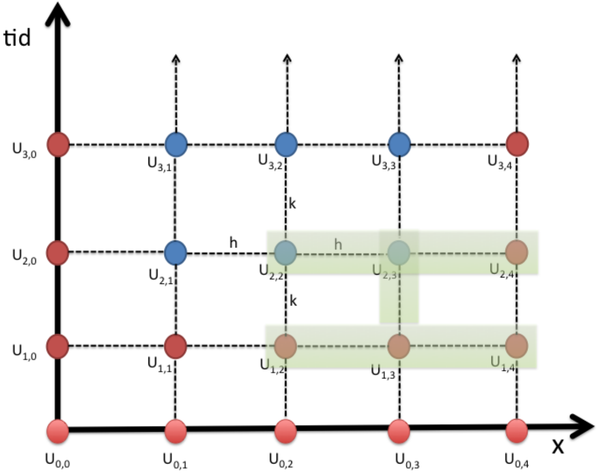


tid
U3,0
U3,1
U3,2
U3,3
U3,4
k
h
h
U2,0
U2,1
U2,2
U2,3
U2,4
k
U1,0
U1,1
U1,2
U1,3
U1,4
U0,0
U0,1
U0,2
U0,3
U0,4
x

# Skritt 2


tid
U3,0
U3,1
U3,2
U3,3
U3,4
k
h
h
U2,0
U2,1
U2,2
U2,3
U2,4
k
U1,0
U1,1
U1,2
U1,3
U1,4
U0,0
U0,1
U0,2
U0,3
U0,4
X

# Skritt 2


tid
$U_{3,0}$
$U_{3,1}$
$U_{3,2}$
$U_{3,3}$
$U_{3,4}$
k
h
h
$U_{2,0}$
$U_{2,1}$
$U_{2,2}$
$U_{2,3}$
$U_{2,4}$
k
$U_{1,0}$
$U_{1,1}$
$U_{1,2}$
$U_{1,3}$
$U_{1,4}$
$U_{0,0}$
$U_{0,1}$
$U_{0,2}$
$U_{0,3}$
$U_{0,4}$
x