



## **TMA4130**

### **Numerisk løsninger av lineær systemer.**

Eduard Ortega

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 44

# Antall beregninger Gauss-eliminering



Antall beregninger Gauss-eliminering metode for en lineær system av  $n$  ligninger og  $n$  ukjente:

- Gausseliminering algoritme

$$\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{2}{3}(n^2-1)n \approx \frac{2}{3}n^3$$

- finne løsning av en triangulær system (Bakoversubstitusjon)

$$n^2$$

# LU-faktorisering

Vi vil finne to matriser L og U slik at

$$A = L \cdot U,$$

hvor

$$L = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{nedretriangulær}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & \cdots & u_{3,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{øvretriangulær}$$





$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$



$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$



$$\begin{cases} \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b} \end{cases}$$

Da

1. løse  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$  med foroversubstitusjon,
2. løse  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$  med Bakoversubstitusjon.

## Doolittles metode

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Da

$$u_{1,k} = a_{1,k} \quad \text{for } k = 1, \dots, n$$

$$m_{j,1} = \frac{a_{j,1}}{u_{1,1}} \quad \text{for } j = 2, \dots, n$$

$$u_{j,k} = a_{j,k} - \sum_{i=1}^{j-1} m_{j,i} u_{i,k} \quad \text{for } k = j, \dots, n \text{ og } j \geq 2$$

$$m_{j,k} = \frac{1}{u_{k,k}} \left( a_{j,k} - \sum_{i=1}^{k-1} m_{j,i} u_{i,k} \right) \quad \text{for } j = k+1, \dots, n \text{ og } k \geq 2$$

# Eksempel



$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ m_{2,1}u_{1,1} & m_{2,1}u_{1,2} + u_{2,2} & m_{2,1}u_{1,3} + u_{2,3} \\ m_{3,1}u_{1,1} & m_{3,1}u_{1,2} + m_{3,2}u_{2,2} & m_{3,1}u_{1,3} + m_{3,2}u_{2,3} + u_{3,3} \end{pmatrix}$$

## Fordeler og ulemper



- faktoriseringene er unik.
- Noen matriser kan ikke LU-faktoriseres. Da må vi bytte rader i matrisene.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Den åpenbare fordelene med å gjøre Gausseliminering på denne formen er at vi kan kalkulere L og U en gang, der så å løse systemet for mange forskjellige **b**.
- Antall beregninger  $\approx \frac{n^3}{3}$

# Choleskys metode



La  $A$  være en symmetrisk og positiv definit matrise, dvs

- $\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} > 0$  for  $\mathbf{x} \neq 0$ ,
- $A$  er symmetrisk, dvs  $A = A^T$

Da vi kan velge  $U = L^T$ , dvs

$$A = L \cdot L^T$$



# Eksempel



$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{2,1} & m_{3,1} \\ 0 & m_{2,2} & m_{3,2} \\ 0 & 0 & m_{3,3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} m_{1,1}^2 & m_{1,1}m_{2,1} & m_{1,1}m_{3,1} \\ m_{2,1}m_{1,1} & m_{2,1}^2 + m_{2,2}^2 & m_{2,1}m_{3,1} + m_{2,2}m_{3,2} \\ m_{3,1}m_{1,1} & m_{3,1}m_{2,1} + m_{3,2}m_{2,2} & m_{3,1}^2 + m_{3,2}^2 + m_{3,3}^2 \end{pmatrix}$$

# Choleskys metode



$$m_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$$

$$m_{j,1} = \frac{a_{j,1}}{m_{1,1}} \quad \text{for } j = 2, \dots, m$$

$$m_{j,j} = \sqrt{a_{j,j} - \sum_{i=1}^{j-1} m_{j,i}^2} \quad \text{for } j = 2, \dots, n$$

$$m_{j,k} = \frac{1}{m_{k,k}} \left( a_{j,k} - \sum_{i=1}^{k-1} m_{k,i} m_{j,i} \right) \quad \text{for } j = k + 1, \dots, n \text{ og } k \geq 2$$



## Setning

Choleskysfaktorisering er numerisk stabil, dvs feil med avrunding vokser ikke stor.

# Iterative ligningsløserere

Vi vil faktorisere

$$A = I + L + U,$$

hvor

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

## Gauss-Seidel iterasjon

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

⇓

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

⇓

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}$$

Da Gauss-Seidel iterasjon er definert

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}^{(n)}$$

# Jacobi iterasjon

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

⇓

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

⇓

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} - (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}$$

Da Jacobi iterasjon er definert

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{b} - (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}^{(n)}$$

# Konvergens



Gauss-Seidel iterasjon konvergerer når enten

- $A$  er symmetrisk og positiv definit, eller
- $A$  er diagonalt dominerende, eller  
dvs  $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$  for alle  $i$
- matrisnormen  $\|C\| < 1$ , hvor  $C = (I + L)^{-1} \cdot U$

Matrisnormen er definert enten

- $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2}$ , eller
- $\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ , eller
- $\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$ .

# konvergens



Jacobi iterasjon konvergerer når enten

- absoluttverdien til egenverdiene til matrise  $(I - A)$  er mindre enn 1,
- $A$  er diagonalt dominerende.